

# 微分方程数值解的泛函估计

刘诗俊

(基础课部)

**摘要** 作者在泛函分析的基础上,运用 *Sobolev* 空间理论中的嵌入定理,得到了4个估计式,即式(3)、(7)、(8)和(13).不论是常微分方程还是偏微分方程,是线性还是非线性问题,只要方程所对应的泛函是严格正定的,就可用这些式子来估计方程数值解的误差.在计算时,可不考虑差分或有限元等计算格式是否收敛,只须在求出数值解  $f$  后,再求出泛函  $E(f)$  的值,即可对数值解  $f$  的质量进行评估.这正适合实际需要,尤其是在求解非线性问题时相当方便.

**关键词** 严格正定泛函; 嵌入定理; 泛函导数

**分类号** O241.8

## 1 对应于严格正定泛函的变分问题的数值解及其误差估计

### 1.1 $R^1$ 中泛函的驻函及其近似解的误差估计

本来可直接讨论  $n$  维情形,但在  $R^1$  中有关常数可以估计得更精确.本文侧重于应用,所以,单独处理  $R^1$  中的问题.

(1) 对于泛函

$$E(f) = \int_a^b L(x, f(x), f'(x)) dx \quad (1)$$

设  $L(\cdot, \cdot, \cdot)$  对括号中的三个变量有二阶连续偏导数.又

$$f \in P_1 = \{f(x) | f(x) \in C^1[a, b], f(a) = A, f(b) = B\}.$$

我们约定,若  $F \in P_1$  使  $E'(f) = 0$  ( $E'(F)$  是当  $f = F$  时  $E(f)$  的“泛函导数”,见文献[1]中 P. 22)则称函数  $F$  是泛函  $E(f)$  的“驻函”.这是“驻点”概念的推广.

我们得到

**引理 1** 对于泛函(1),若  $F \in P_1$  为其驻函,且矩阵

$$H = \begin{bmatrix} L_{ff} & K_{ff} \\ L_{ff'} & L_{ff'} \end{bmatrix} \quad \text{的特征值}$$

收稿日期:1994-04-22. 刘诗俊,男,1933年生,教授.

$$\lambda_i(x, f(x), f'(x)) \geq \lambda_0 > 0. \quad (2)$$

( $i=1, 2; x \in [a, b]; \lambda_0$  为某常数)

(我们称满足条件(2)的泛函(1)为“严格正定泛函”)

对  $\forall f \in P_1$ , 有最大模估计式

$$\max_{x \in (a, b)} |f(x) - F(x)| \leq k \sqrt{\frac{2}{\lambda_0} (E(f) - E(F))}. \quad (3)$$

$$K = \min \left\{ \left( \frac{L}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \frac{L}{2} \right)^{-\frac{1}{2}}, L^{\frac{1}{2}} + L^{-\frac{1}{2}} \right\}, L = b - a.$$

证明 记  $P_1^0 = \{f(x) | f(x) \in C^1[a, b], f(a) = 0 = f(b)\}$ , 对  $\forall f(x) \in P_1$ , 令  $f - F = u$ , 显然  $u \in P_1^0$ . 考虑

$$B(t) = \int_a^b L(x, F + tu, F' + tu') dx = E(F + tu), \text{ 有 } C(C \text{ 在 } 0 \text{ 与 } t \text{ 之间}) \text{ 使}$$

$$B(t) = B(0) + B'(0)t + \frac{1}{2}B''(c)t^2.$$

即

$$B(t) = E(F) + \delta E + \frac{1}{2}B''(c)t^2.$$

在此,  $\delta E$  是泛函  $E(f)$  在  $f=F$  处的一阶变分(参看文献[1]中 P. 22)但  $E'(F)=0$ , 故  $\delta E=0$ , 又

$$\frac{1}{2}B''(c)t^2 = \frac{1}{2}t^2 \int_a^b (\bar{L}_{ff}u^2 + 2\bar{L}_{ff}uu' + \bar{L}_{f'f'}u'^2) dx, \text{ 在此}$$

$$\bar{L}_{ff} = L_{ff}(x, F + cu, F' + cu');$$

$$\bar{L}_{ff'} = L_{ff'}(x, F + cu, F' + cu');$$

$$\bar{L}_{f'f'} = L_{f'f'}(x, F + cu, F' + cu').$$

对于  $\forall x \in [a, b]$ , 有线性正交变换

$$u(x) = C_{11}(x)V(x) + C_{12}(x)W(x);$$

$$u'(x) = C_{21}(x)V(x) + C_{22}(x)W(x);$$

使

$$u^2(x) + u'^2(x) = V^2(x) + W^2(x).$$

且

$$\bar{L}_{ff}u^2(x) + 2\bar{L}_{ff}u(x)u'(x) + \bar{L}_{f'f'}u'^2(x)$$

$$= \lambda_1(x)V^2(x) + \lambda_2(x)W^2(x)$$

$$\geq \lambda_0(V^2(x) + W^2(x)) = \lambda_0(u^2(x) + u'^2(x)).$$

所以

$$\frac{1}{2}B''(c)t^2 \geq \frac{\lambda_0}{2} \int_a^b ((tu)^2 + (tu')^2) dx = \frac{\lambda_0}{2} \|tu\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

$$(\Omega = [a, b], H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)).$$

于是

$$\|tu\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{2}{\lambda_0} (E(F+tu) - E(F)).$$

令  $t=1$ , 得

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|f - F\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{2}{\lambda_0} (E(f) - E(F)).$$

根据著名的嵌入定理(参看文献[2][3]或[4]), 一维 Sobolev 空间  $W^{1,2}(\Omega)$  可嵌入  $C(\Omega)$  空间, 且

$$\|f - F\|_{C(\Omega)} \leq K \|f - F\|_{H^1(\Omega)}.$$

$$(K = \min\{(\frac{L}{2})^{\frac{1}{2}} + (\frac{L}{2})^{-\frac{1}{2}}, L^{\frac{1}{2}} + L^{-\frac{1}{2}}\}, \quad L = b - a)$$

于是 (3) 式成立. 证毕.

注意, 由 (2) 式容易看出, 这时  $E(F) = \min_{f \in P_1} E(f)$  且泛函  $E(f)$  的驻函唯一.

(2) 对于泛函

$$E(f) = \int_a^b L(x, f, f', f'') dx. \quad (4)$$

设  $L(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  对括号中的四个变量有二阶连续偏导数. 又记

$$P_2 = \{f(x) | f(x) \in C^2[a, b], f(a) = A_0, f'(a) = A_1, f(b) = B_0, f'(b) = B_1\}.$$

我们得到

引理 2 对于泛函 (4), 若  $F \in P_2$  为其驻函 (即  $E'(F) = 0$ ), 且矩阵

$$H = \begin{bmatrix} L_{ff} & L_{ff'} & L_{ff''} \\ L_{f'f} & L_{f'f'} & L_{f'f''} \\ L_{f''f} & L_{f''f'} & L_{f''f''} \end{bmatrix} \quad \text{的特征值}$$

$\lambda_i(x, f(x), f'(x), f''(x))$  对任何  $f(x) \in C^2[a, b]$  均满足

$$\lambda_i(x, f(x), f'(x), f''(x)) \geq \lambda_0 > 0. \quad (5)$$

$$i = 1, 2, 3; \quad x \in [a, b]; \quad \lambda_0 = \text{Const.}$$

(我们把满足 (5) 的泛函 (4) 也称为“严格正定泛函”).

则对  $\forall f \in P_2$ , (3) 式均成立. 证明略.

对泛函 (1) 而言, 若

$$L_{ff} \geq 0, L_{ff'} \equiv 0, L_{f'f'} \geq G_0 > 0 \quad (G_0 = \text{Const.}). \quad (6)$$

这时矩阵  $H$  (见引理 1) 可能有一特征值为零, 于是估计式 (3) 不能用. 在这种情况下, 我们得到如下引理可供试用.

引理 3 对泛函 (1) 而言, 若 (6) 成立, 且  $F$  是泛函 (1) 的驻函, 则对  $\forall f \in P_1$  (见引理 1), 有估计式

$$\|f - F\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{L}{G_0} \sqrt{2(E(f) - E(F))}. \quad (7)$$

$$(L = b - a, \Omega = [a, b])$$

证明略.

顺便指出, 对泛函 (1) 来说, 若

$$L_{ff} \geq A_0 > 0, L_{ff} \equiv 0, L_{ff} \geq 0 \quad (A_0 = \text{Const.})$$

则对  $\forall f \in P_1$ , 显然有估计式

$$\|f - F\|_{L^1(\Omega)} \leq \frac{L}{A_0} \sqrt{2(E(f) - E(F))}. \quad (8)$$

## 1.2 $R^n$ 中泛函的驻函数及其近似解的误差估计

(1) 我们要用到一个估计式, 即对于有界域  $\Omega \subset R^n$ , 当  $f \in L^1(\Omega)$  时, 有

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} \leq (\text{mes}\Omega)^{\frac{1}{2}}(n+1)\|f\|_{H^1(\Omega)}. \quad (9)$$

$$(H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega))$$

此式可参看文献 [3]. 但此处的常数是自估算出的.

(2) 驻函数的近似解的误差估计

为叙述方便, 仅就 2 维情形作较详细的说明. 所有结果均适用于  $n$  维. 但在使用嵌入定理时, 估计式与维数有关.

对于泛函

$$E(f) = \int_{\Omega} L(x, y, f(x, y), f_x(x, y), f_y(x, y)) d\Omega, \quad (10)$$

(有界闭域  $\Omega \subset R^2$ , 的边界  $\partial\Omega$  充分光滑)

设  $L(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  对括号中的 5 个变量有二阶连续偏导数. 记

$$P_s = \{f(x, y) | f \in C^1(\Omega), f|_{\partial\Omega} = g(x, y)\}.$$

和上文一样, 当  $F \in P_s$  满足  $E'(F) = 0$  时, 称  $F$  为泛函  $E(f)$  的驻函数. 现在设矩阵

$$H = \begin{bmatrix} L_{ff} & L_{ff_x} & L_{ff_y} \\ L_{f_x f} & L_{f_x f_x} & L_{f_x f_y} \\ L_{f_y f} & L_{f_y f_x} & L_{f_y f_y} \end{bmatrix} \quad \text{的特征值}$$

$\lambda_i(x, y, f, f_x, f_y)$  在  $\Omega \times R^3$  中满足

$$\lambda_i(x, y, f, f_x, f_y) \geq \lambda_0 > 0, \quad (11)$$

$$i = 1, 2, 3, \quad \lambda_0 = \text{Const.}$$

(这时也称泛函 (10) 为严格正定的)

于是, 用与引理 1 相同的证法可得

$$E(f) - E(F) \geq \frac{\lambda_0}{2} \|f - F\|_{H^1(\Omega)}^2, (\forall f \in P_s) \quad (12)$$

所以

$$\|f - F\|_{L^1(\Omega)} \leq \sqrt{\frac{2}{\lambda_0}} (E(f) - E(F)). \quad (13)$$

又由 (9) 式及 (12) 式, 得

$$\|f - F\|_{L^1(\Omega)} \leq 3(\text{mes}\Omega)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\lambda_0}} (E(f) - E(F)). \quad (14)$$

于是, 我们得到

**定理 1** 若泛函 (10) 为严格正定的 (即矩阵  $H$  满足 (11) 式), 则估计式 (13) 和

(14) 均成立.

我们还得到

定理 2 对于泛函

$$E(f) = \int_{\Omega} L(x, y, f(x, y), f_x(x, y), f_y(x, y), f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y), f_{yy}(x, y)) d\Omega \quad (15)$$

设  $L(x, y, f, f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy})$  对括号中的 8 个变量均有二阶连续偏导数. 又设  $F \in H_g = \{f(x, y) | f(x, y) \in C^2(\Omega), f|_{\partial\Omega} = g\}$ ,  $F$  是  $E(f)$  的驻函 (即  $E'(F) = 0$ ). 有界闭域  $\Omega \subset R^2$  的边界  $\partial\Omega$  充分光滑. 若矩阵

$$H = \begin{bmatrix} L_{ff} & L_{ff_x} & L_{ff_y} & L_{ff_{xx}} & L_{ff_{xy}} & L_{ff_{yy}} \\ L_{f_x f} & L_{f_x f_x} & L_{f_x f_y} & L_{f_x f_{xx}} & L_{f_x f_{xy}} & L_{f_x f_{yy}} \\ L_{f_y f} & L_{f_y f_x} & L_{f_y f_y} & L_{f_y f_{xx}} & L_{f_y f_{xy}} & L_{f_y f_{yy}} \\ L_{f_{xx} f} & L_{f_{xx} f_x} & L_{f_{xx} f_y} & L_{f_{xx} f_{xx}} & L_{f_{xx} f_{xy}} & L_{f_{xx} f_{yy}} \\ L_{f_{xy} f} & L_{f_{xy} f_x} & L_{f_{xy} f_y} & L_{f_{xy} f_{xx}} & L_{f_{xy} f_{xy}} & L_{f_{xy} f_{yy}} \\ L_{f_{yy} f} & L_{f_{yy} f_x} & L_{f_{yy} f_y} & L_{f_{yy} f_{xx}} & L_{f_{yy} f_{xy}} & L_{f_{yy} f_{yy}} \end{bmatrix} \quad \text{的特征值}$$

$\lambda_i(x, y, f, f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy})$  在  $\Omega \times R^6$  中满足

$$\lambda_i(x, y, f, f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}) \geq \lambda_0 > 0.$$

$$(i = 1, 2, \dots, 6) \quad \lambda_0 = \text{Const.}$$

则对  $\forall f \in H_g$ , 有

$$\max_{(x, y) \in \Omega} |f(x, y) - F(x, y)| \leq K \sqrt{\frac{2}{\lambda_0} (E(f) - E(F))}. \quad (16)$$

( $K > 0$  是某个与  $f$  无关的常数)

证明 用与引理 1 相同的证法, 容易得到

$$\|f - F\|_{H^2(\Omega)} \leq \sqrt{\frac{2}{\lambda_0} (E(f) - E(F))}, \quad (\forall f \in H_g)$$

根据 Sobolev 空间中的嵌入定理 (参看文献 [2], [3] 或 [4]), 当维数  $n=2$  时,  $H^2(\Omega)$  可“紧嵌”入  $C(\Omega)$ , 所以有  $K > 0$  ( $K$  与  $f$  无关), 使

$$\|f - F\|_{C^2(\Omega)} \leq K \|f - F\|_{H^2(\Omega)},$$

于是 (15) 式成立. 证毕.

对  $n$  维情形我们得到了一般结论. 因叙述太繁, 故略.

## 2 计算实例

### 2.1 非线性常微分方程的边值问题一例

求非线性问题的近似解有许多麻烦, 但若用泛函  $E(f)$  为指标, 在计算机上进行自动控制, 就非常方便了.

对于如下问题

$$(a) \quad \begin{cases} f''(x) = \frac{1}{3}f'(x), & x \in \Omega = [0, 1] \\ f(0) = \sqrt{6}, & f(1) = \frac{\sqrt{6}}{2}, \end{cases}$$

显然泛函  $E(f) = \int_0^1 (\frac{1}{2}(f')^2 + \frac{1}{12}f'')dx$  的 Euler 方程正是 (a) 中的方程, 所以问题 (a) 的解  $f=F$  是  $E(f)$  的驻函数.

由

$$H = \begin{pmatrix} L_{ff} & L_{f''} \\ L_{f''f} & L_{f''f''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可见其特征值

$$\lambda_1 = f^2 \geq 0, \lambda_2 = 1.$$

由引理 3 知 (7) 式可用, 且  $L=1, G_0=1$ . 于是, 对于

$$\forall f \in P_1 = \{f(x) | f(x) \in C^1[0, 1], f(0) = \sqrt{6}, f(1) = \frac{\sqrt{6}}{2}\},$$

有

$$\|f - F\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2(E(f) - E(F))}. \quad (17)$$

(由此式可见 (a) 的解唯一) 作差分方程

$$(a') \quad \begin{cases} N^2(f_{k+1} - 2f_k + f_{k-1}) = \frac{1}{3}f_k^2, & (K = 1, 2, \dots, N-1) \\ f_0 = \sqrt{6}, & f_N = \frac{\sqrt{6}}{2}. \end{cases}$$

用叠代格式

$$f_k^{(m)} = \frac{1}{2}(f_{k+1}^{(m-1)} - \frac{1}{3N^2}(f_k^{(m-1)})^2 + f_{k-1}^{(m-1)})$$

取初值为

$$f_k^{(0)} = \frac{K(\sqrt{6} - \frac{\sqrt{6}}{2})}{N} + \sqrt{6}, \quad K = 0, 1, \dots, N \quad (\text{线性插值})$$

在实际计算时, 可不管差分方程 (a') 是否有唯一解, 也不必考虑叠代格式收敛与否 (这正适合工程界的需要), 只须在求出差分解后, 立即在计算机上求出它对应的泛函, 即可判断此解的优劣.

用差分法, 只定出  $f_i = f(\frac{i}{N})$ ,  $(i=0, 1, \dots, N)$  这  $N+1$  个值 (其中  $f(0)$  及  $f(1)$  为事先给定) 现在规定  $f(x)$  为定义在  $[0, 1]$  上且通过  $N+1$  个点  $P_i(\frac{i}{N}, f(\frac{i}{N}))$ ,  $(i=0, 1, \dots, N)$  的折线. 即

$$f(x) = f_{K-1} + N(f_K - f_{K-1})(x - \frac{K-1}{N}),$$

当  $x \in (\frac{K-1}{N}, \frac{K}{N}]$ ,  $(K=1, 2, \dots, N)$

于是泛函

$$E(f) = \int_0^1 (\frac{1}{2}(f')^2 + \frac{1}{12}f^4)dx = \frac{N}{2} \sum_{k=1}^N (f_k - f_{k-1})^2 + \frac{1}{60N} \sum_{k=1}^N \frac{f_k^5}{f_k - f_{k-1}}.$$

取  $N=4$ , 叠代 29 次后得如下结果

| 近似解               | 精确解                    |
|-------------------|------------------------|
| $f_1=1.964386831$ | $F=\sqrt{6}(1+x)^{-1}$ |
| $f_2=1.638232897$ | $F_1=1.9595968$        |
| $f_3=1.402292228$ | $F_2=1.632997333$      |
| $E(f)=1.76210145$ | $F_3=1.399708571$      |

又取  $N=8$ , 叠代 95 次后得

| 近似解               | 精确解                    |
|-------------------|------------------------|
| $f_1=2.178053603$ | $F=\sqrt{6}(1+x)^{-1}$ |
| $f_2=1.961188728$ | $F_1=2.177324444$      |
| $f_3=1.782271287$ | $F_2=1.959592$         |
| $f_4=1.50$        | $F_3=1.781447273$      |
| $f_5=1.507861702$ | $F_4=1.63299333$       |
| $f_6=1.400677369$ | $F_5=1.507378462$      |
| $f_7=1.306558281$ | $F_6=1.399708571$      |
| $E(f)=1.75304138$ | $F_7=1.306394667$      |

由泛函  $E$  值即知  $N=8$  时的数值解较优. 在此例中精确解  $F$  已知, 由此可得  $E(F)=1.75$ . 于是由 (16) 式得

$$\|f - F\|_{L^2(\omega)} \leq 0.007799205. \text{ (当 } N=8 \text{)}$$

## 2.2 偏微分方程的边值问题一例

对于如下边值问题

$$(b) \quad \begin{cases} f_{xx} + f_{yy} = 2(2 + \operatorname{cthx} + \operatorname{cthy})f(x), (x, y) \in \Omega, \\ f|_{\partial\Omega} = g(x, y), \end{cases}$$

$$\Omega = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}.$$

$f|_{\partial\Omega} = g$  的具体表达式为

$$\begin{cases} f(1, y) = \frac{1}{4}(e^2 - 1)(e^{2y} - 1); \\ f(2, y) = \frac{1}{4}(e^4 - 1)(e^{2y} - 1); \\ f(x, 1) = \frac{1}{4}(e^2 - 1)(e^{2x} - 1); \\ f(x, 2) = \frac{1}{4}(e^4 - 1)(e^{2x} - 1), \end{cases}$$

显然与 (b) 对应的泛函是

$E(f) = \iint_D \left( \frac{1}{2} (f_x^2 + f_y^2) + f^2 (2 + \operatorname{cth} x + \operatorname{cth} y) \right) dx dy$ . (它的 Euler 方程正是 (b) 中的方程). 由此可得矩阵  $H$  (略) 及其特征值  $\lambda_1 = 2(2 + \operatorname{cth} x + \operatorname{cth} y) \geq 0, \lambda_2 = 1 = \lambda_3$ , 可见泛函  $E(f)$  是严格正定的, (13) 式可用, 且可取  $\lambda_0 = 1$ .

我们将 (b) 化为差分方程 (b'), 并用叠代法求解. 取  $N=4$  及  $N=6$ , 分别算出两个解. 与此二解对应的泛函  $E(f)$  值各为 274696.4874 及 253026.541, 可见后一解较优 (详细计算过程及数值结果均略去).

### 参 考 文 献

- [1] Arthur. A. M., Complementary Variational Principles, clarendon press, oxford, 1980
- [2] R. A. 阿丹姆斯. 索伯列夫空间. 北京: 人民教育出版社, 1981
- [3] 李立康, 郭毓陶. 索伯列夫空间引论. 上海: 科技出版社, 1981
- [4] 斯米尔诺夫. 高等数学教程. 第二版. 北京: 人民教育出版社, 1964
- [5] Gilbarg, D., Trudinger, N. S., Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag, Berlin, 1977

## The Functional Estimate of the Numerical Solution of the Differential Equations

Liu shijun

**Abstract** In this paper, we use functional to estimate the error of numerical solution of differential equations. Four estimative formulas (i. e formula (3), (7), (8), (13)) are presented. They can be used for differential equations if their functional is strict positive defined.

**Key words** Strict positive defined functional; Imbedding theorem; Functional derivative