

图的自同构群*

周尚超

(基础部)

摘 要 讨论了置换群可图的充分必要条件并给出若干类可图的置换群.

关键词 图; 自同构群

分类号 O157.5

0 引言和定理

设 F 是集合 V 上的置换群. 若存在图 G , 使得 $F = \text{Aut } G$ (图 G 的自同构群), 则称 F 是可图的. 凡是与 F 恒等的群也称为可图的. 哪些有限置换群是可图的? 这是图与群中的一个困难的问题. Frucht^[1], 李乔^[2], Babai^[3] 和 Cameron^[4] 等人都提到过这个问题, 讨论这个问题的文章不多. Kagno^[5] 用穷举法列出了 $V(|V| \leq 6)$ 上所有的置换群并指出其中的可图群. Kagno 还证明了当 $p > 2$ 时, 循环群 C_p 和交代群 A_p 是不可图的 (可参看文献 [6], 习题 14.13). C. Y. Chao^[7] 证明了 $p (> 2)$ 度的可迁交换群是不可图的. S. P. Mohanty 等人^[8] 证明了: 设 $\langle f \rangle$ 是由 f 生成的循环群, $f = f_1 f_2 \cdots f_n$ ($n \geq 2$) 是 f 的不交的轮换分解, 若 $|f_1| \geq 6$ 且 $|f_1|$ 整除 $|f_i|$ ($i = 2, 3, \dots, n$), 则 $\langle f \rangle$ 是可图的.

本文如无说明均采用文献 [6] 的记号和术语. 本文还采用下列记号

$X(G)$: 图 G 的边集;

uv : 邻接 u 和 v 的边;

$[V_1, V_2] := \{uv | u \in V_1, v \in V_2\}$;

$F(V), V(F)$: 这两个记号都表示 F 是 V 上的置换群, F 是群, V 是集合;

$F_1 \leq F_2$: F_1 是 F_2 的子群;

$F_1 < F_2$: F_1 是 F_2 的子群且 $F_1 \neq F_2$;

$G(V_1)$: 图 G 的以 V_1 为顶点集的导出子图;

$\gcd$: 最大公因数;

$\gcd(V_1, V_2) := \gcd(|V_1|, |V_2|)$;

$\deg(V_i, G)$: 当 V_i 中任意顶点在 G 中的度都相等时, 它表示 V_i 顶点的度;

收稿日期: 1994-08-29. 周尚超, 男, 1948 年生, 教授.

* 江西省自然科学基金资助课题

$\bar{B}$: 当 $B \subseteq V$ 时, $\bar{B} = V - B$;

$f(V)$: $= \{f(u) | u \in V\}$;

$f(uv)$: 邻接 $f(u)$ 与 $f(v)$ 的边;

C_n : 它既表示由一个 n 轮换生成的循环群, 又表示 n 边形.

设 $F = F(V)$, $u, v \in V$. 若存在 $f \in F$, 使 $f(u) = v$, 则称 u 与 v 相似. 根据相似关系, 我们得到 V 的一个划分: $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$. V 中任意两点相似, V_i 与 V_j ($i \neq j$) 中的点不相似. V_i 称为 F 的轨道, $|V_i|$ 称为 V_i 的长, 我们称 F 是 $\{|V_1|, |V_2|, \dots, |V_n|\}$ 型群. 如果 $\text{Aut } G = F$, 则称 G 是 $\{|V_1|, |V_2|, \dots, |V_n|\}$ 型图. 若 $n=1$, 则称 F 是可迁群或点传递群, G 称为点图. 对每个 i , F 诱导出 V_i 上一个可迁置换群, 这个群用 $F_i = F(V_i)$ 表示. 若 B 是 F 的若干个轨道之并, 则 F 诱导出的 B 上的置换群用 $F(B)$ 表示. 这时 $F \leq F(B) + F(\bar{B})$, $F(B) \leq \text{Aut } G(B)$. 当 B 只是由一个轨道组成时, $G(B)$ 是点图.

设 $F = F(B) + F(\bar{B})$, 则称 F (关于和) 是可分群, $F(B)$ 称为 F (关于和) 的因子. 显然可迁群是不可分群. 设 $f_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$, $f_2 = (1, 2, 3, 4, 5, 6)(7)$, $f_3 = (1, 2, 3)(4, 5)$, 则 $\langle f_i \rangle$ ($i=1, 2, 3$) 都是 6 阶循环群. 但是 $\langle f_1 \rangle \cong C_6$ 是不可分群, $\langle f_2 \rangle \cong C_6 + E_1$ 和 $\langle f_3 \rangle \cong C_3 + C_2$ 是可分群.

定义 设 V_i ($i=1, 2, \dots, n$) 是 F 的轨道. $G(OF)$ 是这样图: 它有 n 个顶点 V_i ($i=1, 2, \dots, n$), $V_i V_j \in X(G(OF)) \Leftrightarrow \gcd(|V_i|, |V_j|) > 1$, $G(OF)$ 称为置换群 F 的轨道图. 设 $G(OF)$ 有 m 个支, 第 j 个支的顶点集用 B_j 表示. 如果 $B_j = \{V_p, V_q, \dots, V_t\}$, 则我们也用 B_j 表示 $V_p \cup V_q \cup \dots \cup V_t$.

例 1

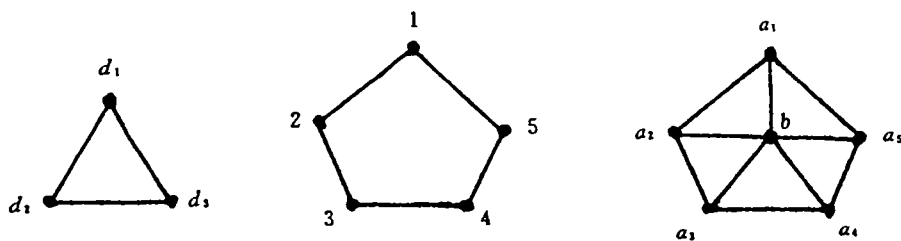


图 1

图 1 中的图 G 的群 $F = \text{Aut } G$ 具有 4 个轨道: $V_1 = \{d_1, d_2, d_3\}$, $V_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $V_3 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $V_4 = \{b\}$. F 的轨道图有 3 个支: 即有一条边 $V_2 V_3$ 和两个孤立点 V_1 和 V_4 . 3 个支的点集为 $B_1 = V_1$, $B_2 = V_2 \cup V_3$, $B_3 = V_4$.

$F = F(B_1) + F(B_2) + F(B_3)$. 其中 $F(B_1) \cong S_3$ (对称群), $F(B_2) \cong D_5 + D_5$, D_5 是二面体群, $F(B_3) = E_1$ (单位群). F 的 3 个因子中, S_3 是可图的, E_1 也是可图的, 但是 $F(B_2)$ 不是可图的. 如果 $F(B_2)$ 可图, 那么它的图必须是两个 C_5 (5 边形) 或两个 C_5 的补图. 此图只有一个轨道, 因此 $F(B_2)$ 不可图. $F(B_2)$ 虽然不可图, 但是 $F(B_2)$ 的因子 D_5 是可图的.

本文主要证明了下列定理.

定理 1 设 F 是有 n 个轨道的置换群. F 的轨道图 $G(OF)$ 有 m 个支, 这 m 个支的点集是

$B_1, B_2, \dots, B_m$. 若 F 是可图的, 则 F 可分解为 m 个因子之和: $F = F(B_1) + F(B_2) + \dots + F(B_m)$.

一个可图群的因子可以是不可图的, 一个明显的例子是 E_p , 当 $p \geq 6$ 时 E_p 才是可图的. $E_p = E_m + E_{p-m}$, 当 $m < 6$ 时, E_m 不可图. 文献[9]中证明了: 设 F_i 可图 ($i=1, 2, \dots, n, n \geq 2$), 则 $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ 不可图的充分必要条件是 $F_1 \cong F_i (i=2, 3, \dots, n), n \leq 5$ 且 F_1 是只有一个图的可迁群. 如果自同构群是 F 的互不同构的图只有一个, 则称 F 是只有一个图的群, 例如 E_1 和 D_5 都是只有一个图的群.

例2 二面体群是由这样两个元素 f_1 和 f_2 生成的: $f_1^2 = 1$ (群的单位元), $f_2^2 = 1, f_1^{-1} f_1 f_2 = f_2^{-1}$. 设 $f_1 = (1, 2, 3, 4, 5)(6, 7, 8), f_2 = (1)(2, 5)(3, 4)(6)(7, 8)$. 则二面体群 $F = \langle f_1, f_2 \rangle$ 轨道图是两个孤立点 $V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}, V_2 = \{6, 7, 8\}, B_1 = V_1, B_2 = V_2, F(B_1) \cong D_5, F(B_2) \cong D_2$. 因为 $|F| = 30, |F(B_1) + F(B_2)| = |D_5| \times |D_2| = 60, F \neq F(B_1) + F(B_2)$, 由定理1, F 不可图.

定理2 设 F 是可图的置换群, $F = F(B) + F(\bar{B})$. 若 $F(B)$ 是可迁群, 则 $F(B)$ 是可图的.

定理2说明可图群的可迁因子是可图的.

设 F 是可图群, $F(B)$ 是 F 的一个不可分因子, 如果 $F(B)$ 是可图的, 那么我们要研究哪些群是可图的, 只要研究不可分群就行了, 即只要研究轨道图是连通图的群就行了. 我们作如下猜想.

猜想 设 F 是可图的置换群, 则 F 的不可分因子是可图的.

1 定理的证明

设 $V = V(G), V_i \subseteq V (i=1, 2)$. 若 $u \in V_1, v \in V_2$, 使 $uv \in X(G)$, 则称 V_1 与 V_2 邻接, 也称 $G(V_1)$ 与 $G(V_2)$ 邻接. 若 $[V_1, V_2] \subseteq X(G)$, 则称 V_1 与 V_2 完全邻接. 若 $V_2 = \{v\}$ 只有一个点, 则称 V_1 与 v 邻接 (完全邻接). 若 V_1 与 V_2 邻接且 V_1 与 V_2 不是完全邻接, 则称为真邻接.

引理1 设 $F = \text{Aut } G, V_1$ 与 V_2 是 F 的两上轨道. 若 $\gcd(V_1, V_2) = 1$, 则 V_1 与 V_2 不是真邻接.

证明 设 $|V_1| = m, |V_2| = n$. 设 $u, v \in V_1, V_2$ 中与 u 邻接的点有 s 个, 即 $u_1, u_2, \dots, u_s$. 存在 $f \in F$, 使得 $f(u) = v$, 而 $f(u_i) \in V_2$ 是与 v 邻接的顶点. 即对 V_1 中任意点 v , 都与 V_2 中 s 个点邻接, 即把 V_1 与 V_2 邻接起来的边有 ms 条. 同理可知对 V_2 中任意点 u_i , 都有 V_1 中的 t 个点与之邻接, 把 V_2 与 V_1 邻接起来的边有 nt 条. $ms = nt$, 由于 $s \leq n, t \leq m, \gcd(m, n) = 1$. 只有 $s = n, t = m$ 或 $s = t = 0$ 两种可能, 即 V_1 与 V_2 要么不邻接, 要么完全邻接. 证毕.

定理1的证明

设 $F = \text{Aut } G$. F 的轨道图有 m 个支, 这 m 个支的点集是 $B_1, B_2, \dots, B_m$. 若 $f \in F$, 则 $f = f_1 f_2 \dots f_m, f_i$ 是 B_i 上的一个置换. $F(B_i) = \{f_i | \text{存在 } f_1 f_2 \dots f_i \dots f_m \in F\}$, 因此有 $F \leq F(B_1) + F(B_2) + \dots + F(B_m)$, 我们只要证明每个 $F(B_i) \leq F$ 就行了. 设 $f_i \in F(B_i), uv \in X(G)$. 若 $uv \in X(G(B_i))$, 则 $f_i(uv) = f(uv) \in X(G)$. 若 $u \in V_i \subseteq B_i, v \in V_j \subseteq \bar{B}_i$, 则 $f_i(u) \in V_i, f_i(v) = v$, 由引理1, V_i 与 V_j 完全邻接, 因此 $f_i(u)$ 与 $f_i(v)$ 邻接. 若 $u, v \in \bar{B}_i$, 则 $f_i(uv) = uv \in X(G)$. 即 f_i 把 G 的边映射为 G 的边, 因此 $f_i \in G, F(B_i) \leq F$. 证毕.

定理2的证明

设 $F = \text{Aut } G$, $F = F(B) + F(\bar{B})$, $B = V_1$. 则 $F(B) \leq \text{Aut } G(B)$. 如果 $f_1 \in \text{Aut } G(B)$, 类似定理1的证明, f_1 把 G 边映射为 G 的边, 因此 $f_1 \in \text{Aut } G$, $f_1 \in F(B)$, $F(B) = \text{Aut } G(B)$. $F(B)$ 是可图.

引理2 设 $F = \text{Aut } G$, B 是 F 的若干个轨道的并集, 则 $F = F(B) + F(\bar{B})$ 的充要条件是: 对于 B 的任一轨道 V_i 与 $\bar{B}$ 的任一轨道 V_j , 都有 V_i 与 V_j 不是真邻接的.

证明 设 $F = F(B) + F(\bar{B})$, $f_1 \in F(B)$, 则 $f_1 \in F$. 设 $u \in V_i$, 则 $v \in V_j$, 则对 V_i 中任一点 $\bar{u}$, 有 $f_1 \in F(B)$, 使 $f_1(u) = \bar{u}$, $f_1(v) = v$, 即 v 与 V_i 完全邻接, 因此 V_i 与 V_j 完全邻接. 类似定理1的证明可证充分性.

由引理2可得不可分自同构群的图的特征.

定理3 设 $F = \text{Aut } G$ 是不可分群, 则对于 F 的任意两个轨道 V_p 和 V_i , 存在轨道 $V_1, V_2, \dots, V_r$, 使得 V_p 与 V_1 真邻接, V_1 与 V_2 真邻接, $\dots$, V_r 与 V_i 真邻接.

定理4 设 $\text{Aut } G = F$. V_1 与 V_2 是 F 的两个轨道. 若 $\gcd(V_1, V_2) = d$, 则存在 $0 \leq p \leq d$, 使得 V_1 中每个顶点恰与 V_2 中的 pn/d 个顶点邻接, V_2 中每个顶点恰与 V_1 中的 pm/d 个顶点邻接. 这里 $m = |V_1|$, $n = |V_2|$.

证明 由引理1的证明得 $ms = nt$, $\frac{m}{d}s = \frac{n}{d}t$. 由于 $\frac{m}{d}$ 与 $\frac{n}{d}$ 互素, 所以 n/d 整除 s . 设 $s = pn/d$, 则 $t = pm/d$. 证毕.

例3 设 F 是 $\{2, 6\}$ 型不可分可图群. 它的两个轨道是 $V_1 = \{a_1, a_2\}$, $V_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 设 $F = \text{Aut } G$. 由定理3, 4, V_1 与 V_2 真邻接, V_1 中每个点恰与 V_2 中3个点邻接, V_2 中每个点恰与 V_1 中一个点邻接. 设 $G(V_2)$ 是 i 度正则图, $i = 0, 1, 2$. (如果 $i \geq 3$, 则在补图 $\bar{G}$ 中, $\deg(V_2, \bar{G}) \leq 2$). 这样的群有4个. $F_i = \text{Aut } G_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) (见图2).

$$F_1 = S_2(E_1 + S_3), G_1 = 2K_{1,3},$$

$$F_2 = \langle f_1, f_2 \rangle, F_3 = \langle f_1, f_3 \rangle, F_4 = \langle f_1, f_3, f_4 \rangle.$$

其中 $f_1 = (123456)(a_1, a_2)$, $f_2 = (12)(45)$, $f_3 = (26)(35)$, $f_4 = (135)$.

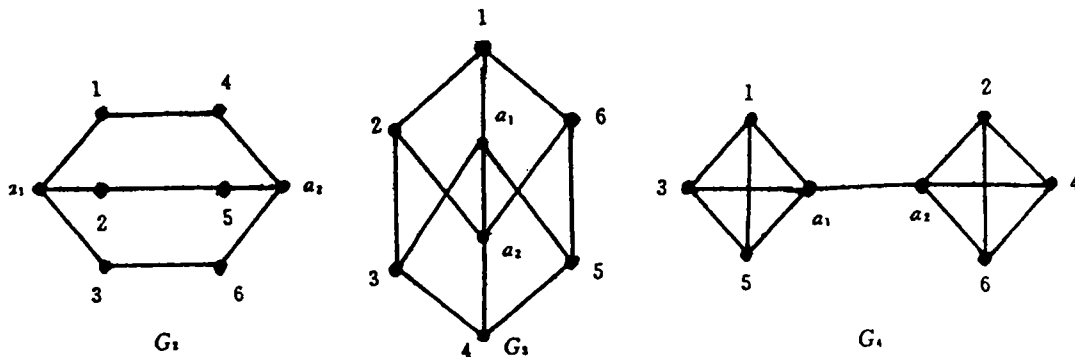


图 2

2 度 ≤ 7 的所有可图置换群

(1) 度 ≤ 3 的可图群

群	S_1	S_2	S_3	E_1+S_2
图	K_1	K_2	K_3	P_3

K_n 为 n 阶完全图, $P_n=12\cdots n$ 是 n 个点的链.

(2) 度 $=4$ 的可图群

群	S_4	D_4	E_1+S_3	S_2+S_2	E_2+S_2	$\langle(14)(23)\rangle$
图	K_4	C_4	$K_{1,3}$	$\overline{K}_2\cup K_2$	$K_1\cup K_{1,2}$	P_4

(3) 度 $=5$ 的可图群

群	S_5	D_5	S_2+S_3	$E_1+F(4)$
图	K_5	C_5	$K_2\cup K_3$	$K_1\cup G(4)$

$F(4)$ 表示任何一个 4 度可图群, $G(4)$ 表示群为 $F(4)$ 的一个连通图. 下同.

(4) 度 $=6$ 的可图群

群	S_6	D_6	$S_2(S_3)$	$S_3(S_2)$	$E_1+F(5)$	S_2+S_4
图	K_6	C_6	$2K_3$	$3K_2$	$K_1\cup G(5)$	$K_2\cup K_4$

群	S_2+D_4	$S_2(E_1+S_2)$	S_3+S_3	D_3^2	$S_2+S_2+S_2$
图	$K_2\cup C_4$	$2P_3$	$\overline{K}_3\cup K_3$	C_3^2	$K_2\cup(K_2+\overline{K}_2)$

群	$\langle(16)(25)(3\ 4)\rangle$	$\langle(14)(23), (a_1a_2)\rangle$	$\langle f_1, f_2 \rangle$	E_6
图	P_6	$P_4\cup P_2$	H	

其中 $D_3^2=\langle(123)(a_1a_2a_3), (23)(a_2a_3)\rangle$, C_3^2 是将三角形 1231 增加 3 点, a_1, a_2, a_3 和 3 边 $1a_1, 2a_2, 3a_3$ 而得的图.

$f_1=(16)(25)(34), f_2=(13)(46)$. H 是 6 边形 1234561 再加一条边 25 而得的图. E_6 的图未

画出,它是有 6 个点的么图.(参看文献[6]).
(5)度=7 的可图群

群	S_7	D_7	S_2+S_5	S_2+D_5	S_3+S_4	$F(2,2)+S_3$	$E_1+F(6)$
图	K_7	C_7	$K_2\cup K_5$	$K_2\cup C_5$	$K_3\cup K_4$	$G(2,2)\cup K_3$	$K_1\cup G(6)$

其中 $F(2,2)$ 表示 4 度 $\{2,2\}$ 型可图群, $G(2,2)$ 是群为 $F(2,2)$ 的连通图.

参 考 文 献

[1] Frucht R. Graphs of Degree Three with a Given Abstract Group. Canad. J Math, 1949, 1: 365~378
[2] 李乔,杜锡录. 图的对称性. 数学的实践与认识,1981,1:57~84
[3] Babai L. On the Abstract Group of Automorphisms, Combinatorics (ed. H. N. V. Temperley). London Math. Soc. Lecture Notes 52, 1981,1~40
[4] Cameron P J. Automorphism Groups of Graphs, Selected Topics in Graph Theory 2. Academic Press, 1983,89~127
[5] Kagro I N. Linear Graphs of Degree ≤ 6 and Their Groups. Amer. J. Math,1946,48:505~520
[6] Harary F. Graph Theory. Reading Mass, 1969
[7] Chao C Y. On a Theorem of Sabidussi. Proc. Amer. Math. Soc. 1964,15:291~292
[8] Mohanty S P, Sridharan M R, Shurla S K. Graphical Cyclic Permutation Groups, Combinatorics and Graph Theory. Lecture Note in Math 885 Springer-Verlag, 1980,339~346
[9] 周尚超. 可图的置换群. 华东交通大学学报,1986,3(2):28~30

Automorphism Groups of Graphs

Zhou Shangchao

Abstract In this paper , we study the necessary condition for F to be graphical. We obtain some kinds of graphical permutation groups.
Key words Graph; Automorphism group