强紧式仿紧性在连续闭映射下的逆象

汪火云

(基础课部)

摘 要 证明了强紧式仿紧性在完备映射下的逆象保持不变,且将这一结论与积空间联系得到一些结果.

关键词 强紧式仿紧;完备映射;积空间

分类号 O189.1

设 X 表示一个拓扑空间,令 $\boldsymbol{k}$ 表示空间 X 中紧子集的全体,CS 表示空间 X 中形如$\{P_n,P\}_{n=1}^{\infty}$的子集的全体,其中 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n=P$. 又如 $\boldsymbol{u}=\{v_\alpha:\alpha\in A\}$,$B\subset X$,则记 $\boldsymbol{u}^*=\bigcup\{v_\alpha:\alpha\in A\}$,$(\boldsymbol{u})_B=\bigcup\{v_\alpha:v_\alpha\cap B\neq\varnothing,\alpha\in A\}$

空间 X 中的集簇 $\boldsymbol{u}=\{v_\alpha:\alpha\in A\}$ 称为紧有限的(CS 有限的)[1],如果对每个 $K\in \boldsymbol{K}(K\in CS)(\boldsymbol{u})_K$ 有限.

空间 X 中的集簇 $\boldsymbol{u}=\{v_\alpha:\alpha\in A\}$ 称为是强紧有限(强 CS 有限)的[1],如果 $\bar{\boldsymbol{u}}=\{\bar{v}_\alpha:\alpha\in A\}$ 是紧有限(CS 有限的).

X 称为紧式(CS 式)仿紧空间[1],如果 X 的每个开复盖都有紧有限(CS 有限)的开加细.

X 称为强紧式(强 CS 式)仿紧空间[1],如果 X 的每个开复盖都有强紧有限(强 CS 有限)的开加细(这里的"加细"具有覆盖 X 的性质).

现在给出本文中所使用的术语:

(1)如果对拓扑空间 X 的任一开复盖 $\boldsymbol{u}$,存在具有集簇性质(P)[注]的开集簇 $\boldsymbol{v}$ 加细 $\boldsymbol{u}$,就说 X 具有性质(P)〔注:集簇性质(P)是指强紧有限(强 CS 有限),X 具有性质(P)是指强紧式(强 CS 式)仿紧〕.

(2)设 M 是拓扑空间 X 的子集. 如果对于 M 的每一个由 X 的开集组成的复盖 $\boldsymbol{u}$,都存在 X 中的开集簇 $\boldsymbol{v}$,使 $\boldsymbol{v}$ 在子空间 $\bar{\boldsymbol{v}}^*$ 中有性质(P),且 $\boldsymbol{v}$ 部分加细 $\boldsymbol{u}$,覆盖 M,就说 M 有性质强 $\alpha-(P)$

(3)具有集簇性质(P)的集簇 $\boldsymbol{u}$ 称为具有遗传性集簇性质(P)的,如果对每一个 $v\in\boldsymbol{u}$,任取 $V_v\subset v$,令 $\boldsymbol{v}=\{V_v:v\in\boldsymbol{u}\}$,$\boldsymbol{v}$ 在子空间 $\bar{\boldsymbol{v}}^*$ 中也具有集簇性质(P),这时也说集簇性质(P)是可遗传的.

收稿日期:1994-04-16. 汪火云,男,1963年生,讲师.

显然强紧有限,强 CS 有限是可遗传的.

因为$\forall K\in k(\bar{v}^*)(K\in CS(\bar{v}^*))$,则$K\in k(K\in CS)$,由于 V 是 u 的精密部分加细.由 u 是强紧有限(强CS有限)知,K仅交u中有限个成员的闭包,进而K仅交v中有限个成员的闭包.

现给出一个基本定理.为此先叙述两个条件.

条件(Ⅰ)　如果 v 是 Y 的具有集簇性质(P)的开集簇.$f:X\to Y$ 是连续的闭映射,则 $f^{-1}(v)=\{f^{-1}(V):V\in v\}$是 X 的具有集簇性质(P)的开集簇.

条件(Ⅱ)　如果 $w=\bigcup\{w_\alpha:\alpha\in A\}$,$\forall\alpha\in A$,开集簇 w_α 于 $\overline{w_\alpha^*}$ 子空间中有集簇性质(P)且$\{w_\alpha^*:\alpha\in A\}$也具有集簇性质($P$),则 w 具有集簇性质(P)

基本定理　设 f 是 X 到具有性质(P)的空间 Y 上的连续闭映射,且$\forall y\in Y$,$f^{-1}(y)$是具有性质强 $\alpha-(P)$的子集,集簇性质(P)可遗传并满足上述条件(Ⅰ)、(Ⅱ),则 X 也具有性质(P).

证　设 u 是 X 的任一开复盖,$\forall y\in Y$,u 是 $f^{-1}(y)$的由 X 的开集组成的复盖,由于 $f^{-1}(y)$具有性质强 $\alpha-(P)$,故存在 X 中的开集簇 $u'(y)$相对于$\overline{u'^*(y)}$具有集簇性质(P),使得$u'(y)$部分加细u,覆盖$f^{-1}(y)$,从而$f^{-1}(y)\subset\bigcup\{v'|v'\in u'(y)\}\triangleq v(y)$,则$v(y)$是$X$中开集.令

$G(y)=Y\setminus f(X\setminus v(y))$,则 $f^{-1}(G(y))\subset v(y)$[事实上:$f^{-1}(G(Y))=f^{-1}[Y\setminus f(X\setminus v(y))]=X\setminus f^{-1}f(X\setminus v(y))\subset X\setminus(X\setminus v(y))=v(y)$],由于 f 是闭映射,故知 $G(y)$是 Y 中开集.且由于 $f^{-1}(y)\subset v(y)$,即知 $y\in G(y)$[因为,否则若 $y\bar{\in}G(y)=Y\setminus f[X\setminus v(y)]$,则 $y\in f[X\setminus v(y)]$.从而存在 $x\in X\setminus v(y)$,即 $x\bar{\in}v(y)$,使 $y=f(x)$.因而 $x\in f^{-1}(y)\subset v(y)$,矛盾!].亦即 $g=\{G(y):y\in Y\}$是 Y 的开复盖.由于 Y 具有性质(P).因而存在具有集簇性质(P)的开集簇 v 加细 g 且覆盖 Y.

对每个 $V\in v$,选取 $y(v)\in Y$,使 $V\subset G(y(v))$,所以 $f^{-1}(V)\subset f^{-1}(G(y(V))\subset v(y(V))$.且令

$w=\{f^{-1}(v)\cap v'|v'\in u'(y(V)),V\in v\}$

由于 f 是连续的,故 w 是 X 中开集簇且加细 u,下证 w 覆盖 X,且具有性质(P).

(1)$\forall x\in X$,即 $f(x)=y\in Y$.由于 v 覆盖 Y,所以存在 $V\in v$,使 $y\in V$,故 $f^{-1}(y)\subset f^{(-1)}(V)$.而 $f^{-1}(V)\subset v(y(V))=\bigcup\{v'|v'\in u(y(V))\}$,故有 $v'\in u'(y(V))$,使 $x\in v'$,因而 $x\in f^{-1}(V)\cap v'\in w$,即 w 覆盖 X.

(2)对每个 $V\in v$,令

$w(V)=\{f^{-1}(v)\cap v'|v'\in u'(y(V))\}$,则 $w=\bigcup\{w(V):V\in v\}$.

由于集簇性质(P)可遗传性,$u'(y(V))$相对于$\overline{u'(y(V))^*}$具有性质(P),故 $w(V)$相对于$\overline{w(V)^*}$具有性质(P),且因 $f^{-1}(V)\subset v(y(V))$,故

$$
\begin{aligned}
w(V)^* &= \bigcup\{f^{-1}(v)\cap v'|v'\in u'(y(V))\}\\
&= f^{-1}(v)\cap(\bigcup\{v'|v'\in u'(y(V))\}\\
&= f^{-1}(V)\cap v(y(V))\\
&= f^{-1}(V)
\end{aligned}
$$

由条件(Ⅰ)知$\{f^{-1}(V)=w^{*}(V)\mid V\in\nu\}$具有集簇性质$(P)$，又由条件(Ⅰ)知$w$具有性质$(P)$.

引理 1　设M是X中的闭子集．$\nu=\{V_\alpha\mid\alpha\in A\}$是$X$中开复盖，且$\nu^{*}\subset M$. 如果$\nu$在子空间$M$中是强紧有限(强$CS$有限)的，则$\nu$在$X$中亦是强紧有限(强$CS$)有限的．

证　(Ⅰ)$\forall\ K\in k(X)$，若$K\cap M=\varnothing$，则K不交ν中任何成员的闭包；若$K\cap M\neq\varnothing$，则$K\cap M$为M中的紧子集，因而$K\cap M$仅交ν中有限个元的闭包，不妨设$K\cap M$仅交$\bar V_1,\bar V_2,\cdots\cdots,\bar V_n$. $\forall\ V\in\nu\backslash\{V_1,V_2,\cdots,V_n\}$，都有$K\cap M\cap\bar V=\varnothing$，即$K\cap\bar V=K\cap\bar V\cap M=\varnothing$，故$K$仅交$\nu$中有限个元的闭包，因而$\nu$于$X$中是强紧有限(强$CS$有限)的．

(Ⅱ)$\forall\ K\in CS(X)$，这时不妨设$K=\{P_n,P\}_{n=1}^{\infty}$(其中$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P$). 当$K\cap M$是无限集时，必有$\{P_n\}_{n=1}^{\infty}\cap M$是无限集，不妨设$\{P_n\}_{n=1}^{\infty}\cap M=\{P_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$，$\{P_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$是收敛序列的子列，故$\lim\limits_{n\to\infty}P_{n_i}=P$. 由于$\{P_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}\subset M$(闭集)，故$P\in M$，因此$K\cap M$为$M$中的$CS$集，仿上可证$K$仅交$\nu$中有限个元的闭包．若$K\cap M$为有限集时，由于$\nu$在$M$中是强$CS$有限的，因而$\bar\nu=\{\bar V;V\in\nu\}$在$M$中是$CS$有限，因而$\bar\nu$在$M$中是点有限的，因此有限集$K\cap M$仅交$\nu$中有限个元的闭包，不妨设$K\cap M$仅交$\bar V_1,\bar V_2,\cdots,\bar V_n$. $\forall\ V\in\nu\backslash\{V_1,V_2,\cdots,V_n\}$，都有$K\cap M\cap\bar V=\varnothing$，即$K\cap\bar V=K\cap\bar V\cap M=\varnothing$，因而$K$仅交$\nu$中有限个元的闭包，因而$\nu$于$X$中是强$CS$有限的．

定理 1　设f是拓扑空间X到强紧式(强CS式)仿紧空间Y上的连续闭映射，且$\forall\ y\in Y$，$f^{-1}(y)$是X的强α-强紧式(强α-强CS式)子集，则X亦是强紧式(强CS式)仿紧空间．

证　利用基本定理证明，验证满足基本定理一切条件即可

(1)强紧有限(强CS有限)是可遗传的．

(2)验证满足条件(Ⅰ)

设$\nu=\{V_\alpha,\alpha\in A\}$是$Y$的强紧(强$CS$)有限的开集簇．记$f^{-1}(\nu)=\{f^{-1}(V)\mid V_\alpha\in\nu\}$. $\forall\ K\in k(X)(K\in CS(X))$，因为$f$是连续闭的，故$f(K)\in k(Y)(f(K)\in CS(Y))$，故$f(K)$仅交$\nu$中的有限个元的闭包，不妨设$f(K)$仅交下标属于有限集$B\subset A$的元素的闭包，故$\forall\ \alpha\in A\backslash B$，有$f(K)\cap\bar V_\alpha=\varnothing$，又因为：

$$\begin{aligned}\overline{f^{-1}(V_\alpha)}\cap K&\subset f^{-1}(\bar V_\alpha)\cap K\\&\subset f^{-1}(\bar V_\alpha)\cap f^{-1}(f(K))\\&\subset f^{-1}(\bar V_\alpha\cap(f(K))\end{aligned}$$

因此，$\forall\ \alpha\in A\backslash B$，$\overline{f^{-1}(V_\alpha)}\cap K=\varnothing$，故$K$仅交$f^{-1}(\nu)$中有限个元的闭包，即$f^{-1}(\nu)$是强紧有限(强$CS$有限的).

(3)验证条件(Ⅱ)满足

设$w=\bigcup\{w_\alpha:\alpha\in A_1\}$，$\forall\ \alpha\in A_1$，$w_\alpha$于子空间$\overline{w_\alpha^{*}}$中是强紧有限(强$CS$有限)的，且$\{w_\alpha^{*}:\alpha\in A\}$是强紧有限(强$CS$有限)的．

$\forall\ K\in K(K\in CS)$，由于$\{w_\alpha^{*}:\alpha\in A_1\}$是强紧有限(强$CS$有限)的，故$K$仅交$\{w_\alpha^{*}:\alpha\in A_1\}$中有限个元的闭包．不妨设$K$仅交下标属于有限集$B_1\subset A_1$的元素闭包，因此有：$\forall\ \alpha\in A_1\backslash B_1$，有$K\cap\overline{w_\alpha^{*}}=\varnothing$. 当然$K$更不交$w_\alpha^{*}$中元素的闭包．即$K$仅交$w_\alpha$中的元素的闭包，$\alpha\in B_1$

因w_α在子空间$\overline{w_\alpha^{*}}$中是强紧有限(强CS有限)的，由引理 1，则w_α在X中亦是强紧有限(强CS有限)的．故K仅交w_α中有限个元的闭包．

因此 K 仅交 w 中有限个元的闭包．

推论 1 设 f 是 $X \to Y$ 的完备映射，若 Y 是强紧式（强 CS 式）仿紧空间，则 X 亦是如此．

证 因为 $\forall\ y \in Y$，$f^{-1}(y)$ 是紧的，则 $f^{-1}(y)$ 是强 α－强紧有限（强 α－强 CS 有限）

定理 2 设 X 是紧空间，Y 是强紧式（强 CS 式）仿紧空间，则 $X \times Y$ 是强紧式（强 CS 式）仿紧空间．

证 因为 X 是紧的，故投影 $P: X \times Y \to Y$ 是完备映射．由推论 1 知定理 2 成立．

引理 2 设 L 是空间 X 的一个强紧有限（强 CS 有限）的开复盖，$\forall\ L \in L$，$\bar{L}$ 是强紧式（强 CS 式）仿紧空间，则 X 亦是强紧式（强 CS 式）仿紧空间．

证 设 u 是 X 的任一开复盖，则$\forall\ L \in L$，$u|_L = \{v \cap \bar{L}: v \in u\}$ 是 $\bar{L}$ 子空间的一个开复盖，故 $u|_L$ 在 $\bar{L}$ 中存在一个强紧（强 CS）有限的开加细 $v|_L$，使得 $(v|_L)^* = \bar{L}$.

$\forall\ L \in L$，令 $w_L = \{V \cap L | V \in v|_L\}$，则 w_L 是覆盖 L，且是 X 中的开集簇．由于 $v|_L$ 于 $\bar{L}$ 中强紧有限（强 CS 有限），故 w_L 于 $\bar{L}$ 中亦强紧有限（强 CS 有限），再由引理 1 知 w_L 在 X 中亦是强紧有限（强 CS 有限）的．

令 $w = \bigcup\{w_L: L \in L\}$，则 w 是 X 中的开复盖且加细 u. 下证 w 亦是强紧有限（强 CS 有限）的．由于 L 是强紧有限（强 CS 有限）的，故$\forall\ K \in k(K \in CS)$，$K$ 仅交有限个 L 中成员的闭包，即 K 仅交$\{w_L: L \in L\}$中有限个集簇中的成员的闭包，又因为$\forall\ L \in L$，w_L 又是强紧有限（强 CS 有限）的，故 K 仅交 w 中有限个成员的闭包．

故引理得证．

推论 2 设 X 是 T_2 的局部紧的强紧式（强 CS 式）仿紧空间，Y 是强紧式（强 CS 式）仿紧空间，则 $X \times Y$ 亦是强紧式（强 CS 式）仿紧空间．

证 因为 X 是 T_2 的局部紧的，故 X 有一个开复盖 $v = \{V_\alpha: \alpha \in A\}$，使得：$\forall\ \alpha \in A$，$\bar{V}_\alpha$ 是紧的，又因为 X 是强紧式（强 CS 式）仿紧的，故对 v 存在一个强紧（强 CS）有限的开加细 $u = \{v_\alpha: \alpha \in B\}$，使得：$\forall\ \alpha \in B$，$\bar{v}_\alpha$ 是紧的（因为 $\bar{v}_\alpha$ 是某一 $\bar{V}_\beta$ 的子集），由定理 2 知 $\bar{v}_\alpha \times Y$ 是强紧式（强 CS 式）仿紧空间．

由于 $u = \{\ _\alpha: \alpha \in B\}$ 是 X 中强紧有限（强 CS 有限的开复盖，故$\{\bar{v}_\alpha \times Y: \alpha \in B\}$是 $X \times Y$ 的一个强紧有限（强 CS 有限）的开复盖．

因为，$\forall\ K \in k_{X \times Y}(K \in CS_{X \times Y})$，令 K_X，K_Y 分别是 K 于 X，Y 上的投影，因此，$K_X \in k(X)$ $(K_Y \in k(Y))$，或相应地 $K_X \in CS_X(K_Y \in CS_Y)$. 由于$\{v_\alpha: \alpha \in B\}$是强紧有限（强 CS 有限的），故 K 仅交下标属于有限集 $B_0 \subset B$ 的$\{\bar{v}_\alpha: \alpha \in B_0\}$中的元的闭包，$\forall\ \alpha \in B \backslash B_0$，有 $K_X \cap \bar{v}_\alpha = \varnothing$. 故 $\forall\ \alpha \in B \backslash B_0$，

$K \cap \overline{v_\alpha \cap Y} \subset (K_X \cap \bar{v}_\alpha) \times (K_Y \cap Y) = \varnothing$，即 K 仅交$\{v_\alpha \times Y: \alpha \in B\}$中有限个元的闭包．

由引理 2 知，$X \times Y$ 是强紧式（强 CS 式）仿紧空间．

注 1 强紧式仿紧空间不具有有限乘积性．在[2]中指出，存在 Sorgenfrey 直线 S，S 是仿紧的，正规的，但 $S \times S$ 是非亚 Lindelöf.

注 2 定理 1 中的 f 能否改为：$\forall\ y \in Y$，$f^{-1}(y)$ 是 Lindelöf 的呢？

文献[3]中的例 1 作出了否定回答，文献[3]中的例 2 还进一步指出，对 f 的要求也不能改为：$\forall\ y \in Y$，$f^{-1}(y)$ 是仿紧的．

顺便指出，文献[4]中的公开问题，文献[3]中早就作出了否定的回答（文献[3]中的例 1）.

感谢江西师大陈清煊教授的指导！

参 考 文 献

[1] J. R. Boone Some Characterizations of paracompactness in K-space. Fund Math, 1971,72;145～155
[2] 戴牧民．σ按点簇正规性、σ亚紧性和σ按点有限基．数学学报,1981(5);656～667
[3] 王燕敏．关于弱于仿紧性质在连续闭映射下的逆象．数学研究与评论,1986(1);15～22
[4] 李雷．紧式仿紧性与完备映射．淮北煤师院学报,1993(1);13～16

The Preimage of Strongly Mesocompactness under Continuous Closed Mapping

Wang Huoyun

Abstract In this paper we prove that the preimage of strongly mesocompactness under perfect mapping are invariant. Through relating to product spaces, we get some conclusions.

Key words Strongly mesocompactress; Perfect mapping; Product spaces