具有给定直径的正则图的最小阶数*

徐保根

（基础课部）

摘　要　设 d 和 K 为任意给定的自然数，$(K\geqslant 2)$，$P_K(d)$ 表示直径为 d 的 K 度正则图的最小阶数，本文给出了 $P_K(d)$ 的表达式．

关键词　图；直径；正则图；完全图

分类号　O157.5

0 引　言

本文所指的图均为有限无向单图，所指的直径均为有限．

在本文中，用 $P_K(d)$ 表示直径为 d 的 K 度正则图的最小阶数；用 $N[v]$ 表示 v 点的闭邻域；$d_G(u,v)$ 表示 u 和 v 两点在 G 中的距离；用 C_m 表示长为 m 的圈；K_s 表示 s 阶完全图；$\bar{G}$ 表示 G 的补图；若 G_1 和 G_2 为两个无公共点的图，则图 G_1+G_2 表示在 $G_1\cup G_2$ 中将 G_1 的各顶点均与 G_2 中的每一个顶点邻接而成的图．其它未说明的符号、术语同于文献[1].

文献[2]给出了正则连通图直径的上界，一个自然的极图问题是：在所有的直径为 d 的 K 度正则图中，最小的图为多少阶？本文完整地回答了这一问题，并且构造了这类极图，认识这类图的结构，对于研究正则图的平均距离是有益的[3].

1 主要结论

定理1　(1)当 $K\geqslant 2$ 时，$P_K(1)=K+1$；

(2)当 $d\geqslant 2$ 时，$P_2(d)=2d$；

(3)当 $K\geqslant 3$ 时，$P_K(2)=K+\dfrac{5-(-1)^K}{2}$.

收稿日期：1994－05－25.　　徐保根，男，1963年生，讲师．

＊江西省自然科学基金资助课题

定理 2　设 d 和 K 均为不小于 3 的整数，则

$$P_K(d)=\begin{cases}\dfrac{(K+1)(d+3)}{3} & d\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3);\\[2mm] \dfrac{(K+1)(d+2)}{3}+\dfrac{3-(-1)^K}{2} & d\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3);\\[2mm] \dfrac{(K+1)(d+1)}{3}+\dfrac{5+(-1)^K}{2} & d\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3).\end{cases}$$

综合上述两个定理，对一切自然数 d 和 $K(K\geqslant 2)$，我们确定了 $P_K(d)$ 的值．

2　定理的证明

首先来证定理 1.

$P_K(1)=K+1(K\geqslant 2)$，这是显然的．此时完全图 K_{K+1} 即是一个极图．$P_2(d)=2d(d\geqslant 2)$，这是由于 $d\neq\infty$，故连通的 2 度正则图为圈，直径为 d 的最小圈为 C_{2d}.

下证 $K\geqslant 3$ 时，$P_K(2)=K+\dfrac{5-(-1)^K}{2}$.

若 K 为偶数，则存在直径为 2 的 $K+2$ 阶 K 度正则图 G 为 $K+2$ 阶完全图去掉一个完美匹配得到的图．而 $P_K(2)\geqslant K+2$ 是显然的．

若 K 为奇数，则 $K+2$ 也为奇数，故不存在 $K+2$ 阶 K 度正则图，从而 $P_K(2)\geqslant K+3$. 另一方面，存在直径为 2 的 $K+3$ 阶 K 度正则图 $H=\overline{K}_3+\overline{C}_K$，从而 $P_K(2)=K+3$. 证毕．

定理 2 的证明(分三种情形)

情形(1)　$d\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$，设 $d=3t(t\geqslant 1)$，图 G 是任意一个直径为 d 的 K 度正则图，在 G 中存在一条长为 d 的道路，记为：$v_0v_1v_2\cdots v_{3t}$，使得 $d_G(v_0,v_{3t})=d$.

用 $N[v]$ 表示 v 点在 G 中的闭邻域．显然，$|N[v_{3i}]|=K+1$，$N[v_{3i}]\cap N[v_{3j}]=\varnothing$，$(0\leqslant i\neq j\leqslant t)$，从而，$|V(G)|\geqslant\sum\limits_{i=0}^{t}|N[v_{3i}]|=(K+1)(t+1)$，将 $t=\dfrac{d}{3}$ 代入上式，并由 G 的任意性得

当 $d\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)$ 时

$$P_K(d)\geqslant\frac{(K+1)(d+3)}{3}.\tag{A}$$

另一方面，可以构造直径为 $3t$ 的 $(K+1)(t+1)$ 阶 K 度正则图 G 如下：

令 $G_0\cong G_t=K_{K+1}-e$，即为 $K+1$ 阶完全图中去掉一条边得到的图．对于每个 $i(1\leqslant i\leqslant t-1)$，令 G_i 为一个 $K+1$ 阶完全图中去掉两条相关联的边得到的图．

显然 G_0 和 G_t 中各有两个 $K-1$ 度点，其余各点的度均为 K. 在 G_i 中 $(1\leqslant i\leqslant t-1)$，各有一个 $K-2$ 度点和两个 $K-1$ 度点，其余点的度均为 K.

将 G_i 中的两个 $K-1$ 度的点均与 G_{i+1} 中唯一的 $K-2$ 度的点邻接 $(i=0,1,2,\cdots t-2)$. 再将 G_{t-1} 中的一个 $K-1$ 度点邻接 G_t 中一个 $K-1$ 度点，而 G_{t-1} 中的另一个 $K-1$ 度点邻接 G_t 中的另一个 $K-1$ 度点，得到图 G.

不难验证，图 G 是直径为 $3t$ 的 $(K+1)(t+1)$ 阶 K 度正则图．图 G 表明

当 $d=3t$ 时

$$P_K(3t)\leqslant(K+1)(t+1)=\frac{(K+1)(d+3)}{3}.$$

结合(A)式,我们有

当 $d\equiv0(\mathrm{mod}\ 3)$时

$$P_K(d)=\frac{(K+1)(d+3)}{3}.$$

情形(2)　$d\equiv1(\mathrm{mod}\ 3)$,设 $d=3t+1(t\geqslant1)$,G 为任意一个直径为 d 的 K 度正则图,G 中存在一条长为 d 的道路,记为 $v_0v_1v^*v_2v_3\cdots v_{3t}$. 并使得 $d_G(v_0,v_{3t})=d=3t+1$. 则 $N[v_{3i}]$是两两不交的闭邻域,$(i=0,1,2,\cdots t)$,且 v^* 点不在任何一个 $N[v_{3i}]$中. 从而 $|V(G)|\geqslant(K+1)(t+1)+1$.

当 K 为奇数时,上式右边为奇数,此时上式中等号不可能成立. 由 G 的任意性得

$$P_K(3t+1)\geqslant(K+1)(t+1)+\frac{3-(-1)^K}{2}\tag{B}$$

另一方面,可以如下构造图 $\tilde{G}$:

(a)当 K 为奇数$(K\geqslant3)$时,令 $G'_t=(P_2\cup\bar{K}_2)+\bar{C}_{K-1}$,显然 G'_t 中恰有两个 $K-1$ 度点、其余点度均为 K. 在情形(1)所构造的图 G 中,将其中的 G_t 换成上述 G'_t,其它(包括邻接方法)均不变,这样便得到一个直径为 $3t+1$ 的 K 度正则图 $\tilde{G}$,其阶数为 $|V(\tilde{G})|=(K+1)(t+1)+2$.

(b)当 K 为偶数$(K\geqslant4)$时,令 H 表示 $K-2$ 阶完全图中去掉$\frac{K-2}{2}$条独立边得到的 $K-2$ 阶 $K-4$ 度正则图. 再令 $G_t^*=(K_3\cup K_1)+H$,G^* 中恰有一个 $K-2$ 度点,其余点的度均为 K. 对于 $i=0,1,2,\cdots t-1$,令 G_i^* 为情形(1)中所定义的 G_i. 将 G_i^* 中的两上 $K-1$ 度点均与 G_{i+1}^* 中唯一的 $K-2$ 度点邻接$(i=0,1,2\cdots t-1)$. 这样得到的图 $\tilde{G}$ 是直径为 $3t+1$ 的 K 度正则图,其阶数为 $|V(\tilde{G})|=(K+1)(t+1)+1$.

综合上述(a)和(b),得知

$$P_K(3t+1)\leqslant(K+1)(t+1)+\frac{3-(-1)^K}{2}.$$

结合(B)式,我们有当 $d\equiv1(\mathrm{mod}\ 3)$且 $d\neq1$ 时,

$$P_K(d)=\frac{(K+1)(d+2)}{3}+\frac{3-(-1)^K}{2}.$$

情形(3)　$d\equiv2(\mathrm{mod}\ 3)$,设 $d=3t+2,(t\geqslant1)$,G 是任意一个直径为 d 的 K 度正则图,G 中存在一条长为 d 的道路记为 $v_0v_1v_1^{(1)}v_2^{(2)}v_2v_3\cdots v_{3t}$.

类似于情形(2),不难证明

$$P_K(3t+2)\geqslant(K+1)(t+1)+2.\tag{C}$$

下面构造图 $\tilde{H}$

(a)当 K 为奇数$(K\geqslant3)$时,令 $H_0\cong H_t=(P_2\cup K_1)+H^*$,其中,$H^*$ 表示一个 $K-1$ 阶完全图中去掉$\frac{K-1}{2}$条独立边得到的图. 对于 $i=1,2,\cdots t\text{-}1$,令 $H_i=K_{K+1}-e$,表示 $K+1$ 阶完全图中去掉一条边得到的图,可见 H_i 中各有两个 $K-1$ 度点,$(1\leqslant i\leqslant t-1)$、而 H_0 和 H_t 中各有一个 $K-1$ 度点,其它各点的度均为 K. 故可将上述 $t+1$ 个 H_i 作如下联接:$H_0-H_1-H_2-\cdots-H_{t-1}-H_t$. 得到一个 K 度正则的连通图 $\tilde{H}$.

不难验证,$\widetilde{H}$ 的直径为 $d=3t+2$,其阶数为 $|V(\widetilde{H})|=(K+1)(t+1)+2$,从而 $P_k(3t+2)\leqslant(K+1)(t+1)+2$,结合($C$)式得到

当 K 为奇数($K\geqslant3$)时

$$P_K(3t+2)=(K+1)(t+1)+2 \tag{D}$$

(b) 当 K 为偶数($K\geqslant4$),我们首先证明

$P_K(3t+2)\neq(K+1)(t+1)+2.$

用反证法,若存在一个直径为 $3t+2$ 的 K 度正则图 G,其阶数为 $|V(G)|=(K+1)(t+1)+2$,则 G 中存在一条长为 $3t+2$ 的道路记为 $v_0v_1v^{(1)}v^{(2)}v_2\cdots v_{3t}$,并使得 $d_G(v_0,v_{3t})=3t+2$,由于 $|N[v_{3i}]|=K+1$,且 $N[v_{3i}]\cap N[v_{3j}]=\varnothing(0\leqslant i\neq j\leqslant t)$,$v^{(1)}$ 和 $v^{(2)}$ 均不在任何一个 $N[v_{3i}]$ 中,又因为 $|V(G)|=(K+1)(t+1)+2=\sum\limits_{i=0}^{t}|N[v_{3i}]|+2$,故除 $v^{(1)}$ 和 $v^{(2)}$ 之外,G 中任何点均在某一个 $N[v_{3i}]$ 中,但与 v_0 点距离为 2 和 3 的点明显不在任何一个 $N[v_{3i}]$ 中,故与 v_0 距离为 2 的点只有唯一的 $v^{(1)}$ 点,与 v_0 距离为 3 的点也只有 $v^{(2)}$ 点,这表明了 G 中的一条边 $e=v^{(1)}v^{(2)}$ 是 G 中的一条桥.将 G 去掉这条桥 e,得到一个有两个分支的图,考虑 v_0 点所在的分支中各顶点的度数之和 $S=K(K+2)-1$,由于 K 为偶数,故 S 为奇数,矛盾.从而(C)式可改为:当 K 为偶数($K\geqslant4$)时

$$P_K(3t+2)\geqslant(K+1)(t+1)+3. \tag{E}$$

另一方面,我们可以构造图 $\widetilde{H}$ 如下:

令 $H_0=(P_2\cup\overline{K}_2)+\overline{C}_{K-1}$,$H_t=(K_3\cup K_1)+H^*$,其中 H^* 表示 $K-2$ 阶完全图中去掉 $\frac{K-2}{2}$ 条独立边得到的图.对于每一个 $i=1,2,\cdots t\text{-}1$,令 H_i 均为 $K+1$ 阶完全图中去掉两条相关 联的边所得到的图.可见 H_i 中恰有一个 $K-2$ 度的点和两个 $K-1$ 度的点,且其余点的度均为 K,而 H_0 中恰有两个 $K-1$ 度点,其余各点度均为 K.H_t 中恰有一个 $K-2$ 度的点,其余各点度均为 K.

分别对每一个 $i=0,1,2,\cdots t\text{-}1$,将 H_i 中的两个 $K-1$ 度的点均与 H_{i+1} 中唯一的 $K-2$ 度点邻接,便得到一个 K 度正则的连通图 $\widetilde{H}$.不难验证:$\widetilde{H}$ 的直径为 $3t+2$,其阶数为 $|V(\widetilde{H})|=(K+1)(t+1)+3$.图 $\widetilde{H}$ 表明,$P_K(3t+2)\leqslant(K+1)(t+1)+3$.由($E$)式及上式得:

当 K 为偶数($K\geqslant4$)时

$$P_K(3t+2)=(K+1)(t+1)+3.$$

由(D)式可见

$$P_K(3t+2)=(K+1)(t+1)+(5+(-1)^K)/2.$$

将 $d=3t+2$,$t=\frac{d-2}{3}$ 代入上式得知

当 $d=3t+2$,即 $d\equiv2(\bmod 3)$ 且 $d\neq2$ 时,

$$P_K(d)=\frac{(K+1)(d+1)}{3}+\frac{5+(-1)^K}{2}.$$

至此,我们完成了定理 2 的证明.

参 考 文 献

[1] *F*. 哈拉里．图论．上海：上海科学技术出版社，1980
[2] 徐保根．正则连通图直径的上界．华东交通大学学报，1994，(2)
[3] 何文杰等．链状正则图的平均距离．应用数学，1991，(4)，28～34

The Minimum Number of Vertices in All K -Regular Graphs with Given Diameter

Xu Baogen

Abstract　Let d and K be both given positive integers, $K \geqslant 2$, and let $P_K(d)$ denote the minimum number of vertices in all K-regular graphs with given diameter d. In this paper, we determine the number $P_K(d)$.

Key words　Graph; Diameter; Regular graph; Complete graph