第12卷 第1期 华东交通大学学报 Vol. 12 No. 1
1995年 3月 Journal of East China Jiaotong University Mar. 1995

图的相对结合数*

邓毅雄

（基础课部）

摘 要 引入了图的相对结合数的概念，讨论了它的性质和某些图的相对结合数，得到它的下界，它与图的Hamilton连通性的关系及联图的相对结合数等结果．

关键词 连通图；邻域；点独立数；最小度；联图；相对结合数

分类号 O157.5

0 引 言

本文仅讨论非平凡的简单连通图，所用术语和记号均可参阅文献[1].

文献[2]中，Woodall 引进了图 G 的结合数 bind(G)即

$$\operatorname{bind}(G)=\min_{\substack{\varnothing\neq S\subseteq V\\ N(S)\neq V}}\frac{|N(S)|}{|S|},$$

其中 $N(S)=N_G(S)=\bigcup\limits_{v\in S}N_G(v)$;

受到图的结合数的定义的启发，我们引入图的相对结合数的概念，其定义如下：

定义 1 设 G 是连通图，则 G 的相对结合数 $B(G)$ 定义为

$$B(G)=\max_{\substack{\varnothing\neq S\subseteq V\\ N(S)\neq V}}\{|S|-N(S)|\}.$$

若 $S^*\subseteq V$，且 $S^*\neq\varnothing$，$N(S^*)\neq V$，使 $B(G)=|S^*|-|N(S^*)|$，则称 S^* 为 G 的一个相对结合数集．

对于某些特殊图类如完全图 $K_n(n\geqslant2)$，圈 $C_n(n\geqslant3)$，路 $P_n(n\geqslant2)$，星 $K_{1,n-1}(n\geqslant3)$和完全偶图 $K_{m,n}$等可较易地直接求出它们的相对结合数．如有：$B(K_n)=-(n-2)$；$B(K_{1,n-1})=n-2$；$B(K_{m,n})=|m-n|$；当 n 为奇数时，$B(C_n)=-1$，$B(P_n)=1$；当 n 为偶数时，$B(C_n)=0$，$B(P_n)=0$.

收稿日期：1994-04-06. 邓毅雄，男，1963年生，讲师．

* 校自然科学基金资助课题

1　相对结合数的下界

定理 1　设 $\delta(G)$是图 G 的最小度数,且 $u\in V(G)$,$d(u)=\delta(G)$,$B=N(u)$,$A=\{v|v\in V(G),N(v)=B\}$.则 $B(G)\geqslant|A|-\delta(G)$.

证明　由于 $u\in A$,所以 $A\neq\varnothing$.取 $S=V-B\neq\varnothing$,则 $N(S)\subseteq V-A\neq V$,且 $|N(S)|\leqslant|V|-|A|$,$|S|=|V|-|B|=|V|-\delta(G)$,故

$$B(G)\geqslant|V-B|-|N(V-B)|\geqslant(|V|-\delta(G))-(|V|-|A|)=|A|-\delta(G).$$

证毕.

特别地,由于 $|A|\geqslant1$,我们有

$$B(G)\geqslant 1-\delta(G).$$

现设 $\alpha(G)$为图 G 的点独立数,我们有

定理 2　若 G 为 n 阶连通图,则

$$G(G)\geqslant 2\alpha(G)-n.$$

证明　设 S 为 G 的一个最大独立集,则 $|S|=\alpha(G)$,$N(S)=V-S$,$|N(S)|=n-\alpha(G)$,从而 $B(G)\geqslant|S|-|N(S)|=\alpha(G)-(n-\alpha(G))=2\alpha(G)-n$.　证毕.

另外显然有:对任意 n 阶连通图 G,$-(n-2)\leqslant B(G)\leqslant n-2$.

2　相对结合数与 Hamilton 连通性

由相对结合数的定义可知,当 $B(G)$越小时,图 G 越可能是 Hamilton 连通的.下面根据已有的关于图的 Hamilton 连通性的结论,得到相对结合数与 Hamilton 连通的关系.以下两引理可参阅文献[3].

引理 1　设 $K(G)$、$\alpha(G)$分别为 G 的连通度和点独立数,如果 $K(G)>\alpha(G)$,则 G 是 Hamilton 连通的.

引理 2　设 G 是 n 阶连通图($n\geqslant3$),且 $\delta(G)\geqslant(n+1)/2$,则 G 是 Hamilton 连通的.

定理 3　设 G 是 n 阶连通图,$K(G)$为 G 的连通度,且 $B(G)<2K(G)-n$,则 G 是 Hamilton 连通的.

证明　由定理 2 我们有　$\alpha(G)\leqslant(n+B(G))/2$,
则由条件得

$\alpha(G)\leqslant(n+B(G))/2<(n+2K(G)-n)/2=K(G)$,即 $\alpha(G)<K(G)$,故由引理 1 得,G 是 Hamilton 连通的.　证毕.

定理 3 的条件是严格的,这只要考虑图 $K_{n,n}$(一个非 Hamilton 连通图)即可.

利用引理 2 和定理 1 易证得

定理 4　若 $B(B)\leqslant-(n-1)/2$,则 G 是 Hamilton 连通的.

3 联图的相对结合数

定理 5 设 G_1 和 G_2 分别是 n_1 和 n_2 阶的非平凡的连通图，则其联图的相对结合数

$$B(G_1+G_2)=\max\{B(G_1)-n_2,B(G_2)-n_1\}.$$

证明 分三种情况讨论

(1) 当 G_1,G_2 都是完全图时，结论显然成立.

(2) 当 G_1,G_2 都不是完全图时，设 S_1 是 G_1 的相对结合数集，由 G_1+G_2 的构造，$N_{G_1+G_2}(S_1)=V(G_2)+N_{G_1}(S_1)$，则

$$B(G_1)=|S_1|-|N_{G_1}(S_1)|=(|S_1|-|N_{G_1+G_2}(S'_1)|+|V_{(G_2)}|$$
$$\leqslant B(G_1+G_2)+n_2,$$

即 $\quad B(G_1+G_2)\geqslant B(G_1)-n_2$;

同理可证 $\quad B(G_1+G_2)\geqslant B(G_2)-n_1$， 故

$$B(G_1+G_2)\geqslant\max\{B(G_1)-n_2,B(G_2)-n_1\}.$$

另一方面，设 S 是 G_1+G_2 的相对结合数集，则 S 必包含于 $V(G_1)$ 或 $V(G_2)$，否则必然导致 $N_{G_1+G_2}(S)=V(G_1+G_2)$. 不妨设 $S\subset V(G_1)$，同样有 $|N_{G_1+G_2}(S)|=|V(G_2)|+|N_{G_1}(S)|$，则

$$\begin{aligned}B(G_1+G_2)&=|S|-|N_{G_1+G_2}(S)|\\&=(|S|-|N_{G_1}(S)|-|V(G_2)|\\&\leqslant B(G_1)-n_2\\&\leqslant\max\{B(G_1)-n_2,B(G_2)-n_1\}.\end{aligned}$$

因此 $B(G_1+G_2)=\max\{B(G_1)-n_2,B(G_2)-n_1\}$.

(3) 当 G_1,G_2 中仅有一个是完全图时，不妨设 G_2 是完全图，与(2)同理可得 $B(G_1+G_2)=B(G_1)-n_2$，又 $\quad B(G_1)-n_2\geqslant-(n_1-2)-n_2=-(n_2-2)-n_1=B(G_2)-n_1$，因此

$$B(G_1+G_2)=\max\{B(G_1)-n_2,B(G_2)-n_1\}.$$ 证毕.

4 相对结合数与图的结构

注意到 $B(K_n)=-(n-2)$，$B(K_{1,n-1})=n-2$，现在我们有

定理 6 设 G 是 n 阶连通图，则 $B(G)=-(n-2)(n\geqslant2)$ 当且仅当 $G=K_n$；$B(G)=n-2$ 当且仅当 $G=K_{1,n-1}$.

证明 当 $B(G)=-(n-2)$ 时，由 $2\alpha(G)-n\leqslant-(n-2)$，则 $\alpha(G)\leqslant1$，故 G 为完全图.

当 $B(G)=n-2$ 时，设 S 为 G 的相对结合数集，且 $|S|=t$，则由 $B(G)=|S|-|N(S)|=n-2$，有 $|N(S)|=t-n+2$. 由于 G 为连通图，则 $N(S)\neq\varnothing$，从而 $t-n+2\geqslant1$，即 $t\geqslant n-1$，显然 $t\neq n$，只有 $t=n-1$，那么 $|S|=n-1$，$|N(S)|=1$. 设 $N(S)=\{v_0\}$ 则 $d(v_0)=n-1$，且除 v_0 外的其余 $n-1$ 个点互不相邻，故 $G=K_{1,n-1}$. 证毕.

定理 7 对任意 n 阶连通图 G，$B(G)\neq n-3$.

证明 若存在图 G'，$B(G')=n-3$. 设 S 为 G' 的相对结合数集，且 $|S|=t$，则 $|N(S)|=t-n+3$，由于 G' 为连通图，则 $|N(S)|\geqslant1$，那么 $t\geqslant n-2$.

当 $t=n-2$ 时，$|N(S)|=1$，则 S 中的 $n-2$ 个点相互独立，且都必与 $N(S)$ 中的点相邻．由 G 的连通性，除此外的另一点必与 $N(S)$ 中的点相邻，故 G 为 $K_{1,n-1}$．但 $B(K_{1,n-1})=n-2>n-3$，矛盾．

当 $t=n-1$ 时，$|N(S)|=2$，显然矛盾．　　证毕．

但从下面定理看到，使 $B(G)=n-4$ 的图是存在的．

定理 8　设图 G 为由星 $K_{1,n-1}(n\geqslant3)$ 添加一条边或由 $K_{1,n-k-1}$ 的某一端点上添加 k 条悬挂边所得的图，则 $B(G)=n-4$．

关于最小度与相对结合数的关系已有定理 1，这里我们考虑几个特殊的最小度与相对结合数的情形．

定理 9　设 G 是 n 阶连通图 $(n\geqslant4)$，且 $\delta(G)=n-2$，则 $B(G)=-(n-4)$；若 $B(G)=-(n-4)$，则 $\delta(G)=n-2$ 或 $n-3$．

证明　设 S 为 G 的相对结合数集，由于 $\delta(G)=n-2$，则 G 中任一点至多与一个点不相邻，又注意到 $S\neq\varnothing$，$N(S)\neq V$，则 $1\leqslant|S|\leqslant2$．

（Ⅰ）　当 $|S|=2$ 时，由于 $|N(S)|\geqslant n-2$，则

$$B(G)=|S|-|N(S)|\leqslant2-(n-2)=-(n-4)；$$

（Ⅱ）　当 $|S|=1$ 时，由于 $|N(S)|\geqslant n-2$，则

$$B(G)=|S|-|N(S)|\leqslant1-(n-2)<-(n-4)，$$

故有　$B(G)\leqslant-(n-4)$．

而当 S 取两不相邻点时，显然上式等号成立，

因此　$B(G)=-(n-4)$．

现设　$B(G)=-(n-4)$，由于 $B(G)\geqslant1-\delta(G)$，

则　$\delta(G)\geqslant1-B(G)=n-3$．

而当 $\delta(G)=n-1$ 时，G 为完全图，故只有 $\delta(G)=n-2$ 或 $n-3$．　　证毕．

由 $B(K_{n-2}+\overline{K}_2)=-(n-4)$ 和 $B(K_{n-3}+(K_2\cup K_1))=-(n-4)$ 知，上述结果均可达．

定理 10　设 G 是 n 阶连通图 $(n\geqslant4)$，且 $\delta(G)=n-3$，则 $B(G)=-(n-4)$ 或 $-(n-6)$．

证明　设 $d(u)=n-3$，取 $S=\{u\}$，则 $|N(S)|=n-3$，故 $B(G)\geqslant|S|-|N(S)|=-(n-4)$；

又设 S 为 G 的一个相对结合数集，注意到 $\delta(G)=n-3$，若 $|S|\geqslant4$，则必有 $N(S)=V$，从而只有 $|S|\leqslant3$，且 $|N(S)|\geqslant n-3$，故

$$B(G)=|S|-|N(S)|\leqslant3-(n-3)=-(n-6)．$$

从而　$-(n-4)\leqslant B(G)\leqslant-(n-6)$．

由定理 9 及 $B(K_{n-3}+\overline{K}_3)=-(n-6)$，所以，$B(G)=-(n-4)$ 和 $-(n-6)$ 均可达到．

下面证明　当 $\delta(G)=n-3$ 时，$B(G)\neq-(n-5)$．事实上，若 $B(G)=-(n-5)$，由 $B(G)\geqslant2\alpha(G)-n$，则 $\alpha(G)\leqslant2$．当 $\alpha(G)=1$ 时，G 为完全图，矛盾；当 $\alpha(G)=2$ 时，设 S 为 G 的相对结合数集，则 $|S|\leqslant2$，$|N(S)|\geqslant n-2$，故

$$B(G)=|S|-|N(S)|\leqslant2-(n-2)=-(n-4)，矛盾，因此，B(G)\neq-(n-5)．$$

证毕．

5 注记

文献[4]讨论了连通图的断裂度$b(G)$，其中

$$b(G)=\max_{S\in C(G)}\{\omega(G-S)-|S|\}.$$

式中$C(G)$表示G的所有点断集的集合，$\omega(G-S)$表示$G-S$的连通分支数.

注意到，对一些特殊图类有$B(G)\leqslant b(G)$. 更一般地，若S是G的一个相对结合数集，且$S=S_1\cup S_2$，其中$\varnothing\neq S_1\not\subset N(S)$，$S_2\subset N(S)$，则显然$S_1$为一独立集，且$N(S)-S=N(S)-S_2$为$G$的点断集，$\omega(G-(N(S)-S_2))\geqslant|S_1|$，从而

$$\begin{aligned}B(G)&=|S|-|N(S)|\\&=|S_1|+|S_2|-(|N(S)-S_2|+|S_2|)\\&\leqslant\omega(G-(N(S)-S_2))-|N(S)-S_2|\\&\leqslant b(G),\end{aligned}$$

即在一定条件下有 $B(G)\leqslant b(G)$.

那么对一般情况是否也有上面不等式成立呢？如果这个猜测成立，我们可得到$B(G)$的一个上界，即

$$B(G)\leqslant b(G)\leqslant\alpha(G)-K(G).$$

参考文献

[1] 邦迪·默蒂著．吴望名等译．图论及其应用．北京：科学出版社，1984

[2] D. Woodall. The binding number of a graph and its Anderson number. J. Combinatorial Theory(B), 1973,(15)

[3] 卡波边柯，莫鲁卓著．聂祖安译．图论的例和反例．长沙：湖南科学技术出版社，1984

[3] 欧阳克智等．图的相对断裂度．兰州大学学报，1993,(3):43～49

Relative Binding Number of Graphs

Deng Yixiong

Abstract This paper introduced a new concept called relative binding number of graphs, discussed it's properties and the relative binding number of some graphs. We got it's lower bounds, the relationship of relative binding number and Hamilton connective, and the relative binding number of join graphs etc.

Key words Connected graph; Neighborhood; Vertex independence number; Minimum degree; Join graph; Relative binding number