机械系统可靠性指标的模糊决策*

黄 洪 钟

(西南交通大学机械工程研究所)

摘　要　在模糊综合评判方法的基础上，提出了二级模糊决策模型．该模型物理意义明确、简单实用，为设计者确定系统的可靠性指标提供了科学依据．并就模型的建立、隶属函数和隶属度的确定方法进行了重点论述，给出了应用实例．

关键词　机械系统；可靠性指标；模糊决策

分类号　TH248

0　引　言

系统的可靠性直接影响整机及其零部件的技术经济性能，因此，在设计时如何确定系统的可靠性指标就显得十分重要，这也是可靠性设计的头一个问题．一般来说，对于不可修系统，这个指标用任务期间内生存概率(可靠度)R或平均寿命$MTTF$的形式给出．对于可修产品则以可用度$A(t)$或平均寿命$MTBF$的形式给出．原则上可靠性指标是根据系统的全面任务要求，现实的零部件、原材料、工艺和技术水平，时间进度，投资能力，并参照国内外同类产品已达到的可靠性，经过综合权衡来加以确定．这是一个系统工程决策问题．考虑到影响可靠度取值的诸因素(设计和制造水平、机器的重要程度、工作载荷的大小及类别、材料性能、加工制造和维修保养费用等)都具有模糊性[1]，因此，本文应用模糊数学的有关理论，在文献〔2～4〕介绍的模糊综合评判方法的基础上，经过修改、扩展，提出了二级模糊决策模型，并将其应用于机械系统可靠度的确定上．

1　二级模糊决策模型

1.1　建立因素集和因素等级集

将影响可靠度的各个因素$u_i(i=1,2,\cdots,n)$组成的集合，记为决策因素集

$$U=\{u_1,u_2,\cdots u_n\}.$$

收稿日期：1994-10-18．　　黄洪钟，男，1963年生，副教授

* 国家自然科学基金资助项目

一般来说，这些因素几乎都是模糊的，它们主要包括设计水平、制造水平、机器的重要程度、工作载荷、材料性能、加工制造费用以及维修保养费用等. 设

$$U = \{u_1, u_2, \cdots, u_6\},$$

其中 u_1、u_2 分别表示设计和制造水平，若设计和制造水平高，则可靠度取小值，反之取大值；u_3 为机器或装置的重要程度，若设计的机器或装置越重要，可靠性要求就越高，则可靠度取大值，反之取小值；u_4 表示工作载荷，若载荷小而平稳，则可靠度取小值，若载荷大且变化频繁或为冲击载荷，则可靠度取大值；u_5 为材料性能，材料性能好，可靠度取小值，反之取大值；u_6 为费用，包括加工制造费用、维修保养费用等. 从图 1 可以看出，系统可靠度的提高，将导致制造费用的增加，但维修保养费用却随着可靠度的提高而降低. A 点的总费用最低，所对应的可靠度为最佳值. 为简化计算，仅考虑制造费用. 一般情况下，费用高，可靠度取大值，反之取小值.

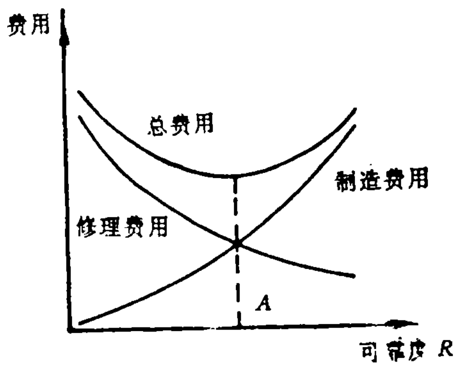

图 1 费用与可靠度关系曲线

决策因素集 U 中的诸元素所处的高低、大小及优劣等状态，可用“高、较高、一般、较低、低”或“好、较好、一般、较差、差”等来表示. 此状态集合即是模糊决策因素等级集，记为 U_i，

$$U_i = \{u_{i1}, u_{i2}, \cdots, u_{im}\}.$$

式中 $u_{ij}(i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,m)$ 为第 i 个因素的第 j 个等级. 如设计水平可分为“很高、高、较高、一般、较低、低、很低”七个等级，并作集合

$$U_i = \{\text{很高}, \text{高}, \cdots, \text{低}, \text{很低}\} = \{1,2,3,4,5\}.$$

由于各个因素的模糊性以及其等级的模糊性，很难规定某一因素具体所处的某一等级，因此，各个因素应视为等级集上的模糊子集，即

$$U_i = \frac{\mu_{i1}}{u_{i1}} + \frac{\mu_{i2}}{u_{i2}} + \cdots + \frac{\mu_{im}}{u_{im}},$$

$$(0 \leqslant \mu_{ij} \leqslant 1, i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,m)$$

式中，μ_{ij} 为第 i 个因素的第 j 个等级对该因素的隶属度.

1.2 建立决断集

对某个具体设计对象（机械装置），根据其功能和使用场合可预先估计其可靠度取值的大致区间〔$\gamma_{el}, \gamma_{eu0}$〕，$\gamma_{eu}$ 和 γ_{el} 分别为可靠度取值的上、下界限，并且假定可靠度在取值区间上是连续的. 由于所求的系统可靠度指标必须包含在预定的区间之内，为了通过模糊决策确定该值，我们将区间〔γ_{el}, γ_{eu}〕按等步长 $\Delta\gamma_e$ 离散为一系列离散值 $\gamma_{ek}(k = 1,2,\cdots,p)$，把 γ_{ek} 组成的集合 $R_e = \{\gamma_{e1}, \gamma_{e2}, \cdots, \gamma_{ep}\}$ 称为决断集. 一般说来，p 越大，区间分得越细，求得的 R^* 值越精确，但计算工作量也越大，因此，p 的取值大小应根据具体设计对象而定.

对于一般的机械设备而言，其可靠度的取值范围为 0.80～0.99[5,6]，即〔0.80，0.99〕. 取步长为 0.019 得决断集

$$R_e = \{0.80, 0.819, 0.838, \cdots, 0.971, 0.99\}.$$

1.3 一级模糊决策

按第 i 个因素的第 j 个等级 u_{ij} 进行评判，若对决断集中第 k 个元素的隶属度为 $\gamma_{ij}k$，则有

$$R_{ij}=\frac{\gamma_{ij1}}{(u_{ij},\gamma_{e1})}+\frac{\gamma_{ij2}}{(u_{ij},\gamma_{e2})}+\cdots+\frac{\gamma_{ij}p}{(u_{ij},\gamma_{ep})},$$

由此得等级评判矩阵

$$\underset{\sim}{R_i}=\begin{bmatrix}\gamma_{i11} & \gamma_{i12} & \cdots & \gamma_{i1p}\\ \gamma_{i21} & \gamma_{i22} & \cdots & \gamma_{i2p}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \gamma_{im1} & \gamma_{im2} & \cdots & \gamma_{imp}\end{bmatrix}.$$

不同的因素所对应的等级评判矩阵一般是不同的，但若两个因素影响决策对象取值的趋势一致时，即两因素的等级与决断集同序时，则相应的等级评判矩阵可取成相同的. 实际上，各因素的影响趋势，一般只有两种情况：因素等级增高，决策对象取值增大；因素等级增高，决策对象取值减少. 因此，若将各因素等级秩序按其影响决策对象取值的趋势一致来排列，便可得到对各因素通用的同一等级评判矩阵.

为了反映某一因素对决策对象取值的影响，应赋予该因素各等级以适当的权数，即应针对每一因素建立相应的等级权重集. 为此，将第 i 个因素的第 j 个等级对该因素的隶属度 μ_{ij} 归一化后的值

$$a_{ij}=\mu_{ij}/\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}\qquad(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$$

取作该等级的权数. 于是，得第 i 个因素的等级权重集为

$$\underset{\sim}{A_i}=(a_{i1},a_{i2}.\cdots,a_{im}).$$

根据模糊变换原理，即可作出一级模糊决策

$$\underset{\sim}{B_i}=\underset{\sim}{A_i}\circ\underset{\sim}{R_i}=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{im})\circ\begin{bmatrix}\gamma_{i11} & \gamma_{i12} & \cdots & \gamma_{i1p}\\ \gamma_{i21} & \gamma_{i22} & \cdots & \gamma_{i2p}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \gamma_{im1} & \gamma_{im2} & \cdots & \gamma_{imp}\end{bmatrix}=(b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{ip}).$$

式中：符号"∘"为模糊算子，采用模型 IV[3] 即 $M(\cdot,+)$ 进行运算，则有

$$b_{ik}=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\gamma_{ij}k.$$

以 b_{ik} 为元素组成的矩阵

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{B_1}\\ \underset{\sim}{B_2}\\ \cdots\\ \underset{\sim}{B_n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np}\end{bmatrix},$$

称为等级综合评判矩阵.

1.4　二级模糊决策

一级模糊决策，综合了各个等级的贡献，具体地反映了一个因素对可靠度取值的影响. 因此，矩阵 $\underset{\sim}{R}$ 即为二级模糊决策的单因素评判矩阵.

通常，各个因素影响可靠度取值的重要程度是不同的. 设 a_i 为第 i 个因素的权数，则反映

各因素重要程度的因素权重集为

$$\underset{\sim}{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

各权数应满足归一性和非负性条件.它们可视为各因素 $u_i(i=1,2,\cdots,n)$ 对"重要"的隶属度,因此,权重集可视为因素集上的模糊子集. $\underset{\sim}{A}$ 确定得恰当与否,直接影响综合评判的结果. $\underset{\sim}{A}$ 的确定方法有多种,一般由人们根据实际问题的需要主观地加以确定,也可按确定隶属度的方法来加以确定.在实际应用中,常用的方法有德尔斐(Delphi)法、专家调查法和判断矩阵分析法[7].

由模糊变换可得二级模糊决策

$$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\circ\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{np}\end{bmatrix}=(b_1,b_2,\cdots,b_p),$$

式中 $$b_k=\sum_{i=1}^{n}a_ib_{ik}.$$

b_k 便是综合考虑所有因素时,决策对象对决断集中第 k 个元素的隶属度,也即是我们据以确定可靠度值的评判指标.

1.5 可靠度值的具体确定

根据模糊决策结果 $b_k(k=1,2,\cdots,p)$,确定系统可靠度 R^* 有两种方法:

(1) 最大隶属度法

取与 $\max\limits_k b_k$ 相对应的备择元素 γ_{ck} 为 R^*,即

$$R^*=\{\gamma_{ck}|\gamma_{ck}\to\max_k b_k\}.$$

(2) 加权平均法

以 $b_k(k=1,2,\cdots,p)$ 为权数,对 $\gamma_{ck}(k=1,2,\cdots,p)$ 进行加权平均的值作为 R^* 值,即

$$R^*=\sum_{k=1}^{p}b_k\gamma_{ck}/\sum_{k=1}^{p}b_k.$$

最大隶属度法仅考虑了 $\max b_k$ 一个指标的贡献,当决断集中元素较少时,决策结果误差可能较大.加权平均法则从整体出发,综合考虑了所有指标的贡献,可得到令人满意的系统可靠度 R^*.

2 隶属度的确定

在二级模糊决策中,恰当地确定各因素对该因素等级的隶属度 μ_{ij} 和各因素等级对备择元素的隶属度 γ_{ijk},是进行决策的关键.

对于可定量表示的决策因素,如工作载荷、材料强度、制造费用等,可以通过曲线拟合构造隶属函数来求得隶属度;对于只能定性表示的决策因素,如设计和制造水平、机器的重要性等,则应根据模糊试验方法或由专家打分综合评定,确定隶属度,将其指标定量化.常用的隶属函数有戒上型、戒下型、梯形、正态型等.

2.1　μ_{ij} 的确定

在决策因素中，u_4(工作载荷)、u_5l(材料强度)和 u_6(制造费用)是定量指标，本文建议采用 Zadeh 教授 1972 年提出的最大、最小隶属函数模型[8]和正态分布曲线来近似模拟这些因素的等级状态对它们的隶属函数 μ_{ij}.

Zadeh 模型为

$$\mu(x)=\begin{cases}1, & f(x)\geqslant \sup(f),\\ \left(\dfrac{f(x)-\inf(f)}{\sup(f)-\inf(f)}\right)^n, & \inf(f)<f(x)<\sup(f),\\ 0, & f(x)\leqslant \inf(f).\end{cases}$$

当 $n=1$ 时为一单调不减直线(戒下型)见图 2.

$$\mu(x)=\begin{cases}1, & f(x)\leqslant \inf(f),\\ \left(\dfrac{\sup(f)-f(x)}{\sup(f)-\inf(f)}\right)^n, & \inf(f)<f(x)<\sup(f),\\ 0, & f(x)\geqslant \sup(f).\end{cases}$$

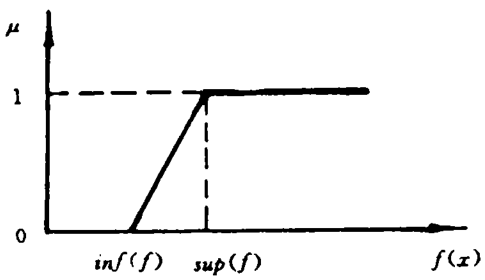

图 2　戒下型 Zadeh 模型曲线

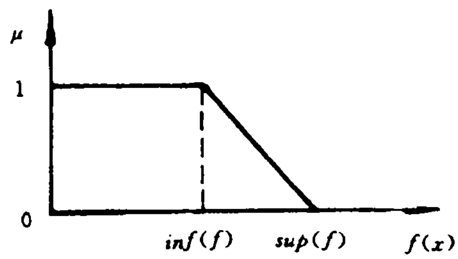

图 3　戒上型 Zadeh 模型曲线

当 $n=1$ 时为一单调不增直线(戒上型)见图 3. 其中，$\sup(f)$、$\inf(f)$ 分别为 $f(x)$ 的上、下界.

正态型分为降半正态分布(戒上型)、升半正态分布(戒下型)和对称型分布三种. 降半正态分布(图 4)

$$\mu(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant a,\\ e^{-k(x-a)^2} & x>a.\end{cases}\quad (k>0)$$

升半正态分布(图 5)

$$\mu(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a,\\ 1-e^{-k(x-a)^2} & x>a.\end{cases}\quad (k>0)$$

对称型正态分布(图 6)

$$\mu(x)=e^{-k(x-a)^2}.\qquad (k>0)$$

决策因素中，设计、制造水平 u_1、u_2 以及机器的重要性 u_3 为定性指标，我们采用文献〔9〕介绍的"四分制对比法"，请专家和设计人员打分来评定其隶属度.

2.2　γ_{ijk} 的确定

γ_{ijk} 是决策因素所处的等级状态对决断集中的元素 γ_{rk} 的隶属度. 由于决断集 R_r 中的元素

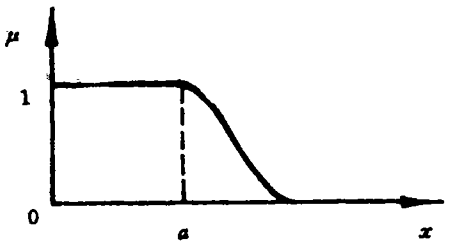

图4　降半正态分布曲线

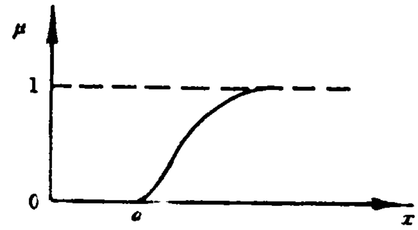

图5　升半正态分布曲线

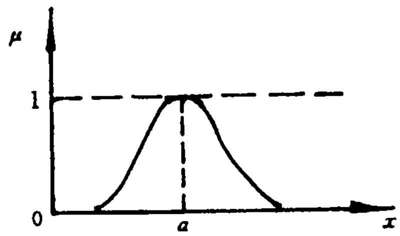

图6　对称型正态分布曲线

是从小到大等步长递增的，因而由高到低的五个等级状态对 R_e 的隶属度可由表1给予表达.

表1　各等级状态元素 γ_{ek} 的隶属度值

等级状态	γ_{e1}	γ_{e2}	γ_{e3}	γ_{e4}	γ_{e5}	γ_{e6}	γ_{e7}	γ_{e8}	γ_{e9}	γ_{e10}	γ_{e11}
高	0.9	1.0	0.9	0.7	0.5	0.3	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0
较高	0.5	0.7	0.9	1.0	0.9	0.7	0.5	0.3	0.1	0.0	0.0
一般	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0	0.9	0.7	0.5	0.3	0.1
较低	0.0	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0	0.9	0.7	0.5
低	0.0	0.0	0.0	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0	0.9

3　实例分析

设计一两级圆柱齿轮减速器. 该减速器承受中等冲击载荷，其主要零件齿轮的材料为40Cr，热处理为调质后表面淬火. 试确定该减速器的可靠度 R^*.

解　因素集 $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6\}$，各因素及其等级见表2，各因素等级对该因素的隶属度见表3.

表 2　各因素及其等级

因　　素	1	2	3	4	5
u_1（设计水平）	高	较高	一般	较低	低
u_2（制造水平）	高	较高	一般	较低	低
u_3（机器重要性）	不重要	不太重要	一般	较重要	重要
u_4（工作载荷）	小	较小	一般	较大	大
u_5（材料强度）	高	较高	一般	较低	低
u_6（制造费用）	少	较少	一般	较高	高

图 3　各因素等级的隶属度值

因　　素	1	2	3	4	5
u_1	0.9	1.0	0.4	0.0	0.0
u_2	0.9	1.0	0.4	0.0	0.0
u_3	0.0	0.4	0.9	0.6	0.0
u_4	0.0	0.2	0.5	1.0	0.0
u_5	0.8	0.9	0.7	0.3	0.0
u_6	0.0	0.4	0.8	0.5	0.2

由于各因素的等级秩序是按影响可靠度指标取值的趋势一致来排列的．故由表 1 得各因素的等级评判矩阵为

$$\underset{\sim}{R}_i=\begin{bmatrix} 0.9 & 1.0 & 0.9 & 0.7 & 0.5 & 0.3 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 0.7 & 0.9 & 1.0 & 0.9 & 0.7 & 0.5 & 0.3 & 0.1 & 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.7 & 0.9 & 1.0 & 0.9 & 0.7 & 0.5 & 0.3 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.7 & 0.9 & 1.0 & 0.9 & 0.7 & 0.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.7 & 0.9 & 1.0 & 0.9 \end{bmatrix},(i=1,2,\cdots,6)$$

由表 3 和$\underset{\sim}{R}_i$ 求得等级综合评判矩阵为

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix} 0.5868 & 0.7477 & 0.8304 & 0.8305 & 0.7436 & 0.5958 & 0.4132 & 0.2523 & 0.1305 & 0.0522 & 0.0174 \\ 0.5868 & 0.7477 & 0.8304 & 0.8305 & 0.7436 & 0.5958 & 0.4132 & 0.2523 & 0.1305 & 0.0522 & 0.0174 \\ 0.4576 & 0.6366 & 0.7736 & 0.8422 & 0.8160 & 0.7108 & 0.5424 & 0.3634 & 0.2054 & 0.0948 & 0.0316 \\ 0.0884 & 0.1708 & 0.2532 & 0.3238 & 0.3708 & 0.3766 & 0.3236 & 0.2412 & 0.1588 & 0.0882 & 0.0294 \\ 0.4593 & 0.6075 & 0.6965 & 0.7225 & 0.6817 & 0.5816 & 0.4297 & 0.2815 & 0.1629 & 0.0777 & 0.0259 \\ 0.1476 & 0.2740 & 0.4004 & 0.5057 & 0.5688 & 0.5687 & 0.4844 & 0.3580 & 0.2316 & 0.1263 & 0.0421 \end{bmatrix}$$

因素权重集取为

$$\underset{\sim}{A}=(0.3,0.2,0.2,0.1,0.1,0.1).$$

则二级模糊决策为

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{R} = (0.45445, 0.60640, 0.70493, 0.73889, 0.69713\\ 0.59275, 0.43885, 0.28690, 0.16166, 0.07428, 0.02476).$$

决断集为

$$R_r = \{0.80, 0.819, 0.838, 0.857, 0.876, 0.895, 0.914, 0.933, 0.952, 0.971, 0.99\}.$$

按最大隶属度法得 $R^* = 0.857$,

按加权平均法得 $R^* = 0.867$.

4 结束语

(1) 二级模糊决策模型物理意义明确,简单实用,为设计者确定机械系统的可靠性指标提供了科学依据.

(2) 本文介绍的方法,大大减少了人为主观因素的干扰,因而使决策结果更加符合实际.

参考文献

1 黄洪钟. 对常规可靠性理论的批判性评述——兼论模糊可靠性理论的产生、发展及应用前景. 机械设计,1994,(3)

2 汪培庄. 模糊集合论及其应用. 上海:上海科技出版社,1983

3 王光远. 论综合评判几种数学模型的实质及应用. 模糊数学,1984,(4)

4 杨光跃. 模糊数学在质量评估中的应用. 优选与管理科学,1987,(2)

5 什赫萨列夫 Г А. 减速器的可靠性计算. 机械设计,1985,(1)

6 布劳德 В И. 起重机可靠性和统计动力学. 北京:中国铁道出版社,1985

7 张跃等. 模糊数学方法及其应用. 北京:煤炭工业出版社,1992

8 Dubois D, Prade H. Fuzzy Sets and Systems——Theory and Applications. Academic Press, 1980

9 傅家骥. 价值分析在产品设计中的应用. 北京:机械工业出版社,1986

Fuzzy Decision—Making for Reliability Index of Mechanical Systems

Huang Hongzhong

Abstract A fuzzy decision—making approach for reliability index of mechanical systems based on the fuzzy comprehensive evaluation with two steps is presented. Some corresponding analyses and example are discussed and the results show that the approach is very effective.

Key Words Mechanical systems; Reliability Index; Fuzzy decision—making