

图 $K_m \cup K_n \cup K_p$ 的优美性*

周尚超

(基础课部)

摘 要 得到了图 $K_m \cup K_n \cup K_p$ 是优美图的充分必要条件.

关键词 图; 优美图; 完全图

分类号 O157

0 引言和主要定理

一个简单图 $G=(V, E)$, V, E 分别是 G 的顶点集和边集, $e=|E|$. 若对于每一顶点 $v \in V$, 存在一个非负整数 $f(v)$, 称为顶点 v 的标号. 如满足下列条件: $f(v) \leq e$, 若 $v_1 \neq v_2$, 则 $f(v_1) \neq f(v_2)$, 且它导出的边的标 $|f(u)-f(v)|$ 各不相同, 这里 $uv=e \in E$, 则称 G 是优美图, f 称为 G 的优美标号.

设 K_m 为 m 阶完全图, $G=K_m \cup K_n \cup K_p$, V_1, V_2, V_3 分别表示 K_m, K_n, K_p 的顶点集, E_1, E_2, E_3 分别表示 K_m, K_n, K_p 的边的集合, e_i 表示 $e-i$ ($i=1, 2, \dots, e-1$). 我们把边(点)的标号与边(点)等同看待, 例如 $V_i(E_i)$ 既表示点(边)的集合也表示点(边)的标号的集合, 最大点(边)表示标号最大的点(边), 等等. 由文献[1]知 nK_m 优美的充要条件是 $n=1$ 且 $m \leq 4$. 文献[2]证明了 $K_m \cup K_n$ 优美的充要条件是 $\{m, n\} = \{4, 2\}$ 和 $\{5, 2\}$. 本文证明了下面定理.

定理 设 $G=K_m \cup K_n \cup K_p$, 其中 $m \geq 2, n \geq 2, p \geq 2$. 则 G 是优美图的充分必要条件是 $\{m, n, p\}$ 为下列情形之一:

$$\begin{aligned} &\{4, 2, 2\}, \{5, 2, 2\}, \{6, 2, 2\}, \\ &\{5, 3, 2\}, \{5, 3, 3\}, \{6, 3, 2\}. \end{aligned}$$

1 定理充分性的证明

定理中的6个图的优美标号如下.

$K_4 \cup 2K_2: (0, 1, 6, 8), (2, 5), (3, 7);$

$K_5 \cup 2K_2: (0, 1, 4, 10, 12), (2, 9), (6, 11);$

收稿日期: 1994-09-23.

周尚超, 男, 1948年生, 教授.

* 江西省自然科学基金资助课题

$K_6 \cup 2K_2: (0, 1, 4, 10, 15, 17), (2, 14), (8, 16);$
 $K_5 \cup K_3 \cup K_2: (0, 1, 9, 12, 14), (3, 7, 13), (4, 11);$
 $K_5 \cup 2K_3: (0, 1, 6, 14, 16), (2, 9, 13), (3, 12, 15);$
 $K_6 \cup K_3 \cup K_2: (0, 1, 4, 11, 17, 19), (2, 7, 16), (3, 15).$

2 定理的必要性的证明

引理1 设 $G = K_m \cup K_n \cup K_p$ 是优美图且 $e \in E_1$, 则 $\{0, 1, e_2, e\} \subseteq V_1$ 或 $\{0, 2, e_1, e\} \subseteq V_1$.

证明 $e \in E_1 \Rightarrow \{0, e\} \subseteq V_1$ 且 $V_2(V_3)$ 中的最大点 $\leq e_1$, 最小点 $\geq 1 \Rightarrow E_2(E_3)$ 中的最大边 $\leq e_2 \Rightarrow e_1 \Rightarrow E_1 \Rightarrow 1 \in V_1$ 或 $e_1 \in V_1$. $1 \in V_1 \Rightarrow V_2(V_3)$ 中的最小点 $\geq 2 \Rightarrow E_2(E_3)$ 中的最大边 $\leq e_3 \Rightarrow e_2 \in E_1 \Rightarrow e_2 \in V_1 \Rightarrow \{0, 1, e_2, e\} \subseteq V_1$. 同理 $e_1 \in V_1 \Rightarrow \{0, 2, e_1, e\} \subseteq V_1$.

设 $G = K_m \cup K_n \cup K_p$ 是优美图, 则 $\max\{m, n, p\} \geq 4$.

设 $\theta(i)$ 是优美图 G 的第 i 个点的优美标号, 则对每个 i , 将标号改为 $e - \theta(i)$ 后仍为 G 的一个优美标号. 如果 G 的一个优美标号使得 $\{0, 2, e_1, e\} \subseteq V_1$, 则改用 $e - \theta(i)$ 后有 $\{0, 1, e_2, e\} \subseteq V_1$. 因此在下文中, 假设 $\{0, 1, e_2, e\} \subseteq V_1$, 并设 K_m 的边最大标号大于 K_p 的边的最大标号. $\{0, 1, e_2, e\} \subseteq V_1 \Rightarrow \{1, 2, e, e_1, e_2, e_3\} \subseteq E_1 \Rightarrow e_4 \in E_1$ 或 $e_4 \in E_2$. 下面分 $e_4 \in E_1$ 或 $e_4 \in E_2$ 两种情形证明.

1.1 $e_4 \in E_1$

$e_4 \in E_1 \Rightarrow 4 \in V_1$ 或 $e_4 \in V_1$. 若 $e_4 \in V_1$, 则有两边边的标号2, 因此 $4 \in V_1$. $\{0, 1, 4, e_2, e\} \subseteq V_1 \Rightarrow \{1, 2, 3, 4, e, e_1, e_2, e_3, e_4, e_6\} \subseteq E_1 \Rightarrow$ 在 V_1 中, 比4大的点 ≥ 9 , 比 e_2 小的点 $\leq e_7 \Rightarrow e_5 \in E_1 \Rightarrow e_5 \in E_2$ 且 $\{2, e_3\} \subseteq V_2$. 由 V_1 和 V_2 已确定的点可知, 在 V_2 中比2大的点 ≥ 7 , 比 e_3 小的点 $\leq e_8$, 因此有 $e_i (i = 7, 8, 9) \in E_2$. 若 $e_7 \in E_1$, 必有 $e_7 \in V_1, \{e_7, e_8, e_{11}\} \subseteq E_1, e_9 \in E_1$. 这样有3种情形: $e_7 \in E_1, e_7 \in V_1, e_9 \in E_3; e_7 \in E_3, \{6, e_1\} \subseteq V_3; e_7 \in E_3, \{3, e_4\} \in V_3$.

(1) $e_7 \in E_1, e_7 \in V_1, e_9 \in E_3$

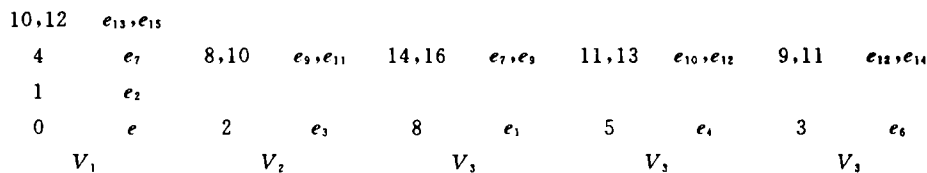


图 1

$e_9 \in E_3$ 有3种: $\{8, e_1\} \subseteq V_3, \{5, e_4\} \subseteq V_3$ 或 $\{3, e_6\} \subseteq V_3$. 如果 $e = 17$, 则我们得到了 $K_6 \cup 2K_2$ 的优美标号. 当 $e > 17$ 时, 图1表示的意义为: 在 V_1 中, 比4大的点为10或 ≥ 12 , 比 e_7 小的点为 e_{13} 或 $\leq e_{15}$. 在 V_2 中, 比2大的点为8或 ≥ 10 , 比 e_3 小的点为 e_9 或 $\leq e_{11}$, 等等. 由图1可知 $e_{10} \in E_2 \cup E_3$, $e_{10} \in E_1$ 且 $10 \in V_1$, 又有 $e_{13} \in E_3, e_{14} \in E_3$. 当 $10 \in V_1, e_{13} \in E_1$, 只有 $e_{13} \in E_2$ 且 $e_{11} \in V_2$, 这时 $e_{14} \in E_2, e_{14} \in E_1$, 这说 $e > 17$ 是不可能的.

(2) $e_7 \in E_3, \{6, e_1\} \subseteq V_3$

如果 $e = 12$, 则得 $K_5 \cup 2K_2$ 的优美标号. 设 $e > 12$. 图2表示在 V_1 中, 比4大的点 ≥ 9 , 比 e_2 小的点 $\leq e_7$, 等等. 由图2得: $e_8 \in E_2 \cup E_3, e_9 \in E_2 \cup E_3, e_{10} \in E_3, e_{11} \in E_3$. 由此得 $e_8 \in V_1, \{e_8, e_9\} \subseteq E_1, e_{10} \in E_1, e_{10} \in E_2, 7 \in V_2$. 如果 $e = 19$, 则得到 $K_6 \cup K_3 \cup K_2$ 优美标号. 如果 $e > 19$, 则由图2, 当

$7 \in V_2, e_8 \in V_1$ 时, $e_{11} \notin E_2, e_{11} \in E_1 \Rightarrow 11 \in V_1$. 这时由 $\{0, 1, 4, 11, e_8, e_2, e\} \subseteq V_1, \{2, 7, e_3\} \subseteq V_2, \{6, e_1\} = V_3$ 可知 $e_{14} \notin E_1 \cup E_2 \cup E_3$, 这说明 $e > 19$ 是不可能的.

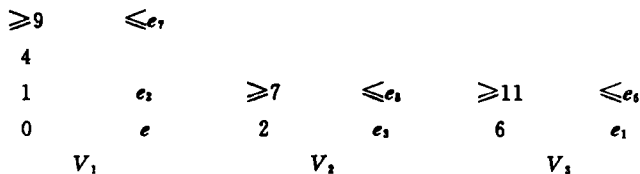


图 2

(3) $e_7 \in E_3, \{3, e_4\} \subseteq V_3$

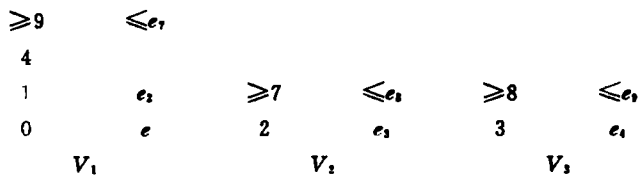


图 3

如果 $e = 12$, 则得 $K_5 \cup 2K_2$ 的优美称号, 设 $e > 12$. 由图 3, $e_8 \notin E_2 \cup E_3, e_9 \notin E_2 \cup E_3, e_{10} \notin E_3, e_{11} \notin E_3$. 因此有 $e_8 \in V_1, \{e_8, e_9, e_{12}\} \subseteq E_1, e_{10} \notin E_1, e_{10} \in E_2, 7 \in V_2$. 如果 $e = 19$, 则得 $K_6 \cup K_3 \cup K_2$ 的优美标号. 这时有 $\{0, 1, 4, e_8, e_2, e\} \subseteq V_1, \{2, 7, e_3\} \subseteq V_2, \{3, e_4\} \subseteq V_3$. 设 $e > 19$, 在 V_1 中, 比 4 大的点为 11 或 ≥ 13 , 比 e_8 小的点为 e_{15} 或 $\leq e_{17}$, 在 V_2 中, 比 7 大的点为 14 或 ≥ 16 , 比 e_3 小的点为 e_{10} 或 $\leq e_{12}$, 在 V_3 中, 比 3 大的点为 15 或 ≥ 17 , 比 e_4 小的点为 e_{11} 或 $\leq e_{13}$. 由此知 $e_{11} \notin E_2 \cup E_3, e_{10} \in E_1$ 且 $11 \in V_1$. 当 $11 \in V_1$ 时, $e_{11} \notin E_1 \cup E_2 \cup E_3, e > 19$ 不可能.

1.2 $e_4 \in E_1$

分 3 种情形: $e_5 \in E_3, \{2, e_3\} \subseteq V_3; e_5 \in E_1, 5 \in V_1; e_5 \in E_1, e_5 \in V_1$.

(1) $e_5 \in E_3, \{2, e_3\} \subseteq V_3$

如果 $e = 8$, 则得到 $K_4 \cup 2K_2$ 的优美称号. 设 $e > 8$. 这时由 $\{0, 1, e_2, e\} \subseteq V_1, \{3, e_1\} \subseteq V_2, \{2, e_3\} \subseteq V_3$, 可得 $e_6 \notin E_2 \cup E_3, e_7 \notin E_3$. 因此有两种情形: $\{e_6, e_7\} \subseteq E_1$ 或 $e_6 \in E_1, e_7 \in E_2$.

(I) $\{e_6, e_7\} \subseteq E_1$

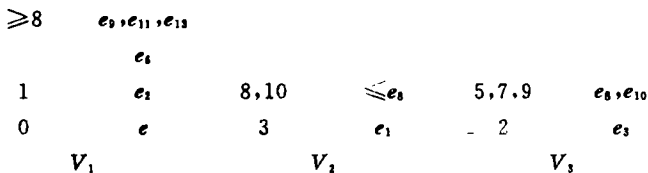


图 4

这时有 $e_6 \in V_1$. 由图 4 知 $e_8 \notin E_2, e_{10} \notin E_2, e_9 \notin E_3, e_{11} \notin E_3$. 如果 $e_8 \in E_1$, 必有 $8 \in V_1, e_9 \notin E_2 \cup E_1$, 不可能. 设 $e_8 \in E_3$, 则 $5 \in V_3, e_9 \in E_1$ 或 E_2 . 设 $e_9 \in E_2$, 则 $8 \in V_2$, 如果 $e = 16$, 则得 $K_5 \cup 2K_3$ 的优美标号, $\{0, 1, e_8, e_2, e\} \subseteq V_1, \{3, 8, e_1\} \subseteq V_2, \{2, 5, e_3\} \subseteq V_3$. 这时 $e_{10} \notin E_3$. 设 $e > 16$, 则 $e_{10} \in E_1, 10 \in V_1$. 这时 $e_{11} \notin E_2$ 且 $e_{11} \notin E_1$, 因此 $e > 16$ 不可能.

(II) $e_6 \in E_1, e_7 \in E_2, e_4 \in V_2, 6 \in V_1$

由图 5 得 $e_9 \notin E_2, e_{10} \notin E_2 \cup E_3, e_{11} \notin E_3$. 设 $e_9 \in E_3$, 则 $e_7 \in V_3$. 如果 $e = 16$, 则得到 $K_5 \cup 2K_3$

的优美标号, $\{0, 1, 6, e_2, e\} \subseteq V_1, \{3, e_4, e_1\} \subseteq V_2, \{2, e_7, e_3\} \subseteq V_3$. 设 $e > 16, e_{10} \in E_1 \Rightarrow e_{10} \in V_1$, 这时 $e_{12} \in E_1 \cup E_2 \cup E_3$, 因此, 当 $e_9 \in E_3$ 时, $e > 16$ 不可能. 设 $e_9 \in E_1$, 则 $e_9 \in V_1$. 这时 $e_{11} \notin E_2 \cup E_1$, 因此 $e_9 \in E_1$ 不可能.

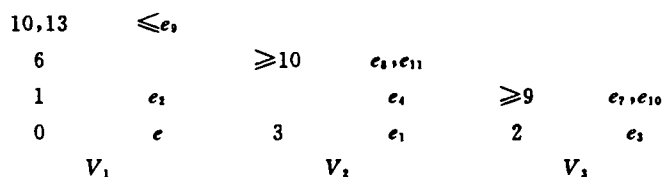


图 5

(2) $e_5 \in E_1, 5 \in V_1$

这时有 $\{0, 1, 5, e_2, e\} \subseteq V_1, \{3, e_1\} = V_2, e_8 \notin E_1 \cup E_2, e_8 \in E_3, \{2, e_4\} \subseteq V_3$.

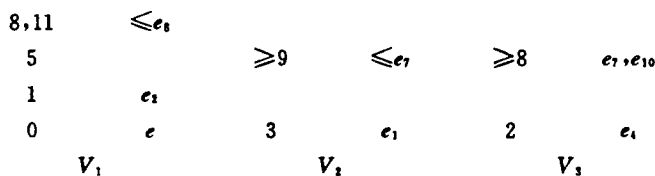


图 6

由图6, $e_8 \notin E_2 \cup E_3, e_9 \notin E_2, e_{10} \notin E_3, e_{11} \notin E_3$. 如 $8 \in V_1$, 同 $e_9 \notin E_1$ 且 $e_9 \notin E_3$. 如果 $e_8 \in V_1$ 则 $e_{10} \in E_2, 6 \in E_1 \cap E_2$, 不可.

(3) $e_5 \in E_1, e_5 \in V_1$

这时有 $\{0, 1, e_5, e_2, e\} \subseteq V_1, \{3, e_1\} \subseteq V_2, e_7 \in E_2$. 若 $e_7 \in E_1$, 则 $7 \in V_1, e_8 \notin E_1 \cup E_2, e_{10} \notin E_1 \cup E_2, \{e_8, e_{10}\} \subseteq E_3$ 是不可能的. 设 $e_7 \in E_3$, 则 $\{4, e_3\} \subseteq V_3$.

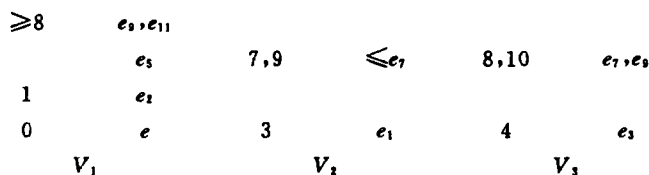


图 7

由图7, $e_8 \notin E_3, e_9 \notin E_2 \cup E_3, e_{10} \notin E_3, \{e_8, e_9\} \subseteq E_1$ 不可能, 因此 $e_8 \in E_2, 7 \in V_2$. 如果 $e = 14$, 则得到 $K_5 \cup K_3 \cup K_2$ 的优美称号. 设 $e > 14$, 则 $e_9 \in E_1, 9 \in V_1, e_{10} \notin E_1$. 如果 $e_{10} \in E_2$, 则 $e_7 \in V_2, e_{14} \in E_1 \cap E_2$, 矛盾. 因此 $e > 14$ 不可能.

参 考 文 献

- 1 柳柏濂. 关于优美图的最近结果. 应用数学, 1990, 3(4): 108~110
- 2 周尚超. 关于图 $K_m \cup K_n$ 的优美性. 兰州铁道学院学报. 1993, 12(2): 70~72

Gracefulness on $K_m \cup K_n \cup K_p$

Zhou Shangchao

Abstract That $K_m \cup K_n \cup K_p$ is graceful if and only if $(m, n, p) = (4, 2, 2), (5, 2, 2), (6, 2, 2), (5, 3, 2), (5, 3, 3)$ or $(6, 3, 2)$, where K_m is complete graph with p vertices is proved.

Key words Graph; Graceful graph; Complete graph

关于论文摘要和关键词的书写

1 摘要

(1)论文摘要的内容应包括研究目的、主要的方法、结果和结论等。摘要应尽量写成报道性文摘,即指论文实质性内容的水摘;也可以写成指示性文摘,即指论文主题范围的水摘;或写成两者结合的水报——指示性文摘。

(2)摘要应具有独立性和自含性,应是一篇完整的水短水,用词要精炼,结构要严谨,一般不分段,不必在水摘的开头冠以“本文”等字样;应客观、如实地反映原文的内容,不得简单地重复题名;不用图表、化学结构式和非公认的水符号或术语;不宜引用图、表、公式和参考文献的水序号;不进行自我评价。

(3)摘要中若采用非标准的水术语、缩写词和水符号等,均应在第1次出现时予以说明。

(4)报道性文摘以300字以内为宜,指示性文摘约100字左右,报道——指示性文摘以200字为宜。

(5)英文摘要应与中文摘要内容相对应,采用第三人称过去式表述。

2 关键词

(1)为便于文献索引和检索而选取的用来表达论文主题内容的水词或水词组称关键词,每篇论文一般选3~8个。

(2)关键词可直接从文章的水题和正文中抽取,并可照文章中的自然字面形式来表述。

(3)中、英文关键词应一一对应,词与水词间用水分号隔开,每个英文词组的第一个字母用水大写。