

关于和谐图的几个结果

徐 保 根

(基础课部)

摘 要 从考虑与完全图有关的几类图的和谐性,得到了几个新的结果,并部分地回答了文献[1]中几个未解决的问题.

关键词 完全图; 和谐图; 和谐标号

分类号 O157.5

0 引 言

本文所指的图均为无向单图. $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集. m 个图 G 的并记为 mG ; m 个完全图 K_n 具有一个公共 K_r ($r < n$)的图记为 $B(n, r, m)$.特别地,当 $r = 1$ 时, $B(n, 1, m)$ 又记为 $K_n^{(m)}$ (参见文献[1]).

若 G_1 和 G_2 是两个无公共点的图,则其联图记为 $G_1 + G_2$,定义为^[2]

$$V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2),$$

$$E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{xy | x \in V(G_1), y \in V(G_2)\},$$

其它未说明的符号、术语同文献[2].

定义^[1] 对于一个 (p, q) -图 G ,若存在一个映射 $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, q\}$,使得满足

(1) $f(u) \neq f(v), u \neq v \in V(G)$,

(2) $\{f(u) + f(v) \pmod q | uv \in E(G)\} = \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$.

其中 $\pmod q$ 取非负最小剩余,则称图 G 为和谐图,称 f 为 G 的和谐标号.若 G 为一棵树时,允许有某两个点有相同的标号.

和谐图同优美图一样,在编码、循环设计和通讯网络等组合理论中有广泛的应用,但由于在其研究中缺乏系统有力的工具,至今只限于对某些特殊图类探讨其和谐性.文献[1]综述了近年来的某些结果,并引出了一些未解决的问题.本文主要对其中与完全图有关的若干图类探讨其和谐性.

收稿日期:1994-08-31.

徐保根,男,1963年生,讲师.

1 主要结果的叙述

引理 1^[1,2] 当 n 为奇数或 $n = 6$, $K_n^{(2)}$ 不是和谐图.

定理 1 若 $K_n^{(2)}$ 是和谐图, 则 n 可表示为两整数的平方和.

推论 1.1 若 $n \equiv 3 \pmod{4}$ 或者 $n \equiv 6 \pmod{8}$, 则 $K_n^{(2)}$ 不是和谐图.

推论 1.2 若素数 $P \equiv 3 \pmod{4}$, 整数 $t \geq 0$, $n = 2^t \cdot P$, 则 $K_n^{(2)}$ 不是和谐图.

定理 2 对任意整数 $m \geq 2$, 则 $B(3, 2, m)$ 和 $B(4, 3, m)$ 均为和谐图.

推论 2.1 若 S_m 表示 m 阶星图 ($m \geq 2$), 则 $S_m + K_1$ 和 $S_m + K_2$ 均为和谐图.

定理 2 及其推论 2.1 回答了文献[1]中列出的若干问题.

文献[3]中(参见文献[1])证明了: 当且仅当 $n \leq 4$ 时, K_n 为和谐图. 但对于 m 个完全图的并图 mK_n 的和谐性, 目前尚无其他的结果.

定理 3 设整数 $m \geq 1, n \geq 2$, 且满足下列条件之一: (1) $m \equiv 2 \pmod{4}$ 且 $n \equiv 1 \pmod{2}$; (2) $m \equiv 1 \pmod{2}$ 且 $n \equiv 1 \pmod{4}$, 则 mK_n 不是和谐图.

定理 4 当且仅当 m 为正奇数时, mK_3 为和谐图.

对于 m 个 n -圈的并图 mC_n , 我们有:

定理 5 若整数 $m \geq 1, n \geq 3$, 且 $mn \equiv 0 \pmod{2}$, 则 mC_n 不是和谐图.

2 结论的证明

(1) 定理 1 的证明

假设 $K_n^{(2)}$ 是和谐图, f 为其和谐标号. $K_n^{(2)}$ 中的两个 $2n$ 阶完全图记为 G_1 和 G_2 ($G_1 \cap G_2 \cong K_n$), 由 $K_n^{(2)}$ 的定义知 G_1 和 G_2 有唯一公共点.

设数集 $A_i = \{f(u) | u \in V(G_i)\}$ 中有 n_i 个奇数, 自然有 $2n - n_i$ 个偶数 ($i = 1, 2$).

对于 $K_n^{(2)}$ 中的一边 $e = uv$, 若 $f(u) + f(v)$ 是奇数, 则称 e 为奇边, 否则为偶边.

因 $q = |E(K_n^{(2)})| = 2n(2n - 1)$ 为偶数, 根据和谐图的定义, $K_n^{(2)}$ 中共有 $q/2$ 条奇边. 又 $E(G_1) \cup E(G_2) = E(K_n^{(2)})$, $E(G_1) \cap E(G_2) = \emptyset$, 且不难看出 G_1 中共有奇边数为 $n_1(2n - n_1)$, G_2 中共有奇边数目为 $n_2(2n - n_2)$. 因此有

$$n_1(2n - n_1) + n_2(2n - n_2) = q/2 = n(2n - 1),$$

整理上式得 $(n - n_1)^2 + (n - n_2)^2 = n$.

证毕.

(2) 推论 1.1 的证明

由初等数论的基本知识得知: 当 $n \equiv 3 \pmod{4}$ 或 $n \equiv 6 \pmod{8}$ 时, n 不能表为两整数的平方和, 由定理 1, $K_n^{(2)}$ 不是和谐图.

证毕.

(3) 推论 1.2 的证明

由于 $n = 2^t P$ ($t \geq 0$), $P \equiv 3 \pmod{4}$ 为素数. 当 $t = 0$ 时, 由引理 1 得知 $K_n^{(2)}$ 不是和谐图; 当 $t = 1$ 或 2 时, 由推论 1.1 得知 $K_n^{(2)}$ 不是和谐图.

下设 $t \geq 3$, 记 $n_1 = n/2 = 2^{t-1} \cdot P$.

用反证法 若 n_1 可表示两整数的平方和, 即不定方程 $x^2 + y^2 = 2^{t-1} \cdot P$ 有整解 (x, y) .

设 $(x, y) = d, x = dx_0, y = dy_0, (x_0, y_0) = 1$, 故有 $d^2(x_0^2 + y_0^2) = 2^{t-1} \cdot P$. 由于 P 为素数, 从而有 $d = 2^s (s \geq 0)$, 即 $x_0^2 + y_0^2 = 2^{t-2s-1} \cdot P$.

若 $t - 2s - 1 = 0$ 或 1 , 则 $2^{t-2s-1} \cdot P \equiv 3 \pmod{4}$ 或 $2^{t-2s-1} \cdot P \equiv 6 \pmod{8}$. 由推论 1.1 的证明, 矛盾. 若 $t - 2s - 1 \geq 2$, 则 $2^{t-2s-1} \cdot P \equiv 0 \pmod{4}$. 此时必有 x_0 和 y_0 均为偶数, 这与 $(x_0, y_0) = 1$ 矛盾. 从而 n_1 不能表为两整数的平方和, 由定理 1, $K_n^{(2)}$ 不是和谐图. 证毕.

(4) 定理 2 的证明

(I) 由于 $B(3, 2, m) \cong K_2 + \bar{K}_m$, 记 $V(K_2) = \{u_1, u_2\}, V(\bar{K}_m) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$. 定义映射 f 如下:

$$f(u_i) = i, (i = 1, 2)$$

$$f(v_j) = 2j + 1. (j = 1, 2, 3, \dots, m)$$

不难验证 f 为图 $B(3, 2, m)$ 的和谐标号.

(II) 由于 $B(4, 3, m) = K_3 + \bar{K}_m$. 同样地, 记 $V(K_3) = \{u_1, u_2, u_3\}, V(\bar{K}_m) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$. 定义映射 f 如下:

$$f(u_i) = i, (i = 1, 2, 3)$$

$$f(v_j) = 3j + 2. (j = 1, 2, 3, \dots, m)$$

不难验证 f 为 $B(4, 3, m)$ 的和谐标号. 因此 $B(3, 2, m)$ 和 $B(4, 3, m)$ 均为和谐图. 证毕.

由定理 2 得知, 推论 2.1 是显然的.

(5) 定理 3 的证明

记 $G = mK_n. (m \geq 1, n \geq 2)$

用反证法 若 m 和 n 满足定理 3 中两条件之一, 且 G 为和谐图. 设 f 为其和谐标号. 由和谐图的定义知 $\{f(u) + f(v) \pmod{q} \mid uv \in E(G)\} = \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$, 其中 $q = |E(G)| = mn(n-1)/2$. 考虑上式两边数集内各元素之和得

$$(n-1) \sum_{u \in V(G)} f(u) \equiv q(q-1)/2 \pmod{q},$$

即存在整数 S 和 T , 使得

$$(n-1)S = q(q-1)/2 + qT.$$

将 $q = mn(n-1)/2$ 代入上式并消去 $(n-1)$ 得

$$S - mnT/2 = mn[mn(n-1)/2 - 1]/4, \quad (1)$$

$$2S - mnT = mn[mn(n-1)/2 - 1]/2. \quad (2)$$

由于 m 和 n 满足定理 3 中两条件之一. 即有

(I) 若 $m \equiv 2 \pmod{4}$, 且 $n \equiv 1 \pmod{2}$, 则式(1)左端为整数, 而右端不是整数, 矛盾.

(II) 若 $m \equiv 1 \pmod{2}$, 且 $n \equiv 1 \pmod{4}$, 则式(2)左端整数, 而右端不是整数, 矛盾, 至此, 定理 3 证毕.

(6) 定理 4 的证明

必要性: 若存在偶数 $m = 2n$, 使得图 $G = mK_3$ 为和谐图. 设 f 为其和谐标号, 由于 $|V(G)| = |E(G)| = 6n$, 根据和谐标号 f 的定义可知: $\{f(u) \mid u \in V(G)\} = \{1, 2, \dots, 6n\}$, 再由于 $\{f(u) + f(v) \pmod{6n} \mid uv \in E(G)\} = \{0, 1, 2, \dots, 6n-1\}$, 考虑上述两边集合内各元素之和, 可得

$$2 \sum_{i=1}^{6n} i \equiv \sum_{i=0}^{6n-1} i \pmod{6n},$$

即 $6n(6n+1) \equiv 3n(6n-1) \pmod{6n}$, 这显然矛盾. 必要性证毕.

充分性: 由于 m 为奇数, 设 $m = 2n + 1$, $G = mK_3$, 在图 G 中, 记第 i 个 K_3 的顶点集为 $\{u_i, v_i, w_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, m$). 由于 $|V(G)| = |E(G)| = 3m = 6n + 3$. 定义映射 f 如下: $f(u_i) = 3i - 2, f(v_i) = 3i - 1, f(w_i) = 3i$. ($i = 1, 2, \dots, 2n + 1$). 可见

$\{f(u) + f(v) | uv \in E(G)\} = \{6i - 1, 6i - 2, 6i - 3 | i = 1, 2, \dots, 2n + 1\}$, 不难验证, 这 $6n + 3$ 个数模 $(6n + 3)$ 两两不同余, 而 $|E(G)| = 6n + 3$, 故可得知映射 f 是图 G 的和谐标号, 即 m 为奇数时, mK_3 为和谐图. 定理 4 证毕.

(7) 定理 5 的证明

令 $G = mC_n$, 显然 $|V(G)| = |E(G)| = mn$.

设 G 为和谐图, f 为其和谐标号. 类似于定理 4 必要性的证明, 不难得出

$$2 \sum_{i=1}^{mn} i \equiv \sum_{i=0}^{mn-1} i \pmod{mn},$$

即 $mn(mn+1) \equiv mn(mn-1)/2 \pmod{mn}$.

从而存在整数 T , 使得:

$$mn(mn+1) = mn(mn-1)/2 + mnT,$$

即 $mn+1 = (mn-1)/2 + T$. 这与定理条件 $mn \equiv 0 \pmod{2}$ 和 T 为整数矛盾. 定理 5 证毕.

参 考 文 献

- 1 Joseph A, Gallian. A Survey: Recent Results, Conjectures, and Open Problems in Labeling Graphs. J Graph Theory, 1989, 13(4): 491~504
- 2 F·哈拉里. 图论. 上海: 上海科技出版社, 1980
- 3 Graham R L, Sloane N J A. On Additive Bases and Harmonious Graphs. SIAM. J. Alg. Discrete Math., 1980, (1): 382~404
- 4 华罗庚. 数论导引. 北京: 科学出版社, 1979
- 5 柳柏濂. 关于优美图的最近结果. 应用数学, 1990, 3(4): 108~110

Several Results in Harmonious Graphs

Xu Baogen

Abstract In this paper, We discuss mainly the harmoniousness of some graphs related to complete graphs, obtain several new results and answer partly questions in the paper[1].

Key Words Complete graph; harmonious graph; harmonious labeling