第12卷 第2期 华东交通大学学报 Vol.12 No.2
1995年 6月 Journal of East China Jiaotong University Jun. 1995

近似列紧空间与近似序列紧空间

汪 火 云

（基础课部）

摘 要 引进了近似列紧空间与近似序列紧空间的概念，并对可数近似紧空间，近似列紧空间，近似序列紧空间建立了关系.

关键词 近似列紧；近似序列紧

分类号 O189. 1

设(X,J)表示一个拓扑空间.$\forall x\in X$,$RO(x)$表示含x的所有正则开集组成的集簇，$N(x)$表示点x的开邻域系.$\forall A\subset X$,$\overline{A}$表示A的闭包,A^0表示A的内核.

定义1 设$A\subset X$,称点x为A的近似聚点,若$\forall U\in RO(x)$,都有$U\cap(A\sim\{x\})\neq\varnothing$,$A$的所有近似聚点组成的集,称为$A$的近似导集,记为$\mathrm{dn}A$.

显然,如果x是A的聚点,则x亦是A的近似聚点(即$\mathrm{d}A\subset\mathrm{dn}A$),但反之不一定成立.

例1 令$X=\{x_1,x_2,x_3\}$,$J=\{\varnothing,\{x_1\},X\}$,则$(X,J)$是一个拓扑空间.令$A=\{x_1,x_2\}$.含$x_1$的开集有$\{x_1\}$及$X$,而含$x_1$的正则开集只有$X$,故$x_1$不是$A$的聚点,但是$A$的近似聚点.

定理1 对于拓扑空间X的任意子集A,B有

(1) $\mathrm{dn}(\varnothing)=\varnothing$;

(2) 若$A\subset B$,则$\mathrm{dn}A\subset\mathrm{dn}B$;

(3) $\mathrm{dn}(A\cup B)=\mathrm{dn}A\cup\mathrm{dn}B$;

(4) $\mathrm{dn}(\mathrm{dn}A)\subset A\cup\mathrm{dn}A$.

证 (1)及(2)是显然的,仅证(3)及(4).

(3) 由于$A,B\subset A\cup B$,由(2)有$\mathrm{dn}A\cup\mathrm{dn}B\subset\mathrm{dn}(A\cup B)$.反之,$\forall x\notin\mathrm{dn}A\cup\mathrm{dn}B$,则$x\notin\mathrm{dn}A$且$x\notin\mathrm{dn}B$,于是分别存在$U,V\in RO(x)$,使$U\cap(A\sim\{x\})=\varnothing$,$V\cap(B\sim\{x\})=\varnothing$.令$W=U\cap V$,则$W\in RO(x)$(见文献[1],$P28$).显然$W\cap(A\cup B\sim\{x\})=\varnothing$,因而,$x\notin\mathrm{dn}(A\cup B)$即$\mathrm{dn}(A\cup B)\subset\mathrm{dn}A\cup\mathrm{dn}B$.(3)成立.

(4) 若$x\notin A\cup\mathrm{dn}A$,则$x\notin A$且$x\notin\mathrm{dn}A$.于是存在$U\in RO(x)$,使$U\cap(A\sim\{x\})=\varnothing$.由于$x\notin A$,故有$U\cap A=\varnothing$.因而$U$中每一点都不是$A$的近似聚点,即$U\cap\mathrm{dn}A=\varnothing$,而$x\in U$,故$x\notin\mathrm{dn}(\mathrm{dn}A)$,因此(4)成立.

收稿日期:1994-09-20. 汪火云,男,1963年生,讲师.

定义 2　设 $A \subset X$，称 A 为近似闭集．若 A 包含 A 的所有近似聚点．近似闭集的余集称为近似开集．

定理 2　设 $A \subset X$，则 A 为近似闭集 $\Leftrightarrow \sim A$ 为 X 中一簇正则开集之并．

证　设 A 为近似闭集．$\forall x \in \sim A$ 即 $x \notin A$，且有 $x \notin \mathrm{dn}A$，因此，存在 $U_x \in RO(x)$，使 $U_x \cap (A \sim \{x\}) = \varnothing$．由于 $x \notin A$，则 $U_x \cap A = \varnothing$．因而 $U_x \subset \sim A$．从而 $\sim A = \bigcup \{U_x : x \in \sim A\}$．即 $\sim A$(近似开集) 为一簇正则开集之并．

反之，若 $\sim A$ 为 X 中一簇正则开集之并．因而 $\forall x \in \sim A$，存在 $V_x \in RO(x)$，使 $x \in V_x \subset \sim A$，故 $V_x \cap A = \varnothing$，即有 $x \notin \mathrm{dn}A$，从而 $x \in \sim \mathrm{dn}A$，亦就是 $\sim A \subset \sim \mathrm{dn}A$，因而 $A \supset \mathrm{dn}A$．故 A 为近似闭集．

定义 3　设 $A \subset X$，称 $A \cup \mathrm{cl}_n A$ 为 A 的近似闭包，记为 $\mathrm{cl}_n A$．

显然 $\mathrm{cl}_n A \supset \overline{A}$，但反之不一定成立(见本文例 2)．

显然 $x \in \mathrm{cl}_n A \Leftrightarrow \forall U \in RO(x)$，有 $U \cap A \neq \varnothing$．

定理 3　设 $A \subset X$，A 为近似闭集 $\Leftrightarrow A = \mathrm{cl}_n A$

证　A 为近似闭集 $\Leftrightarrow A \supset \mathrm{cl}_n A \Leftrightarrow A = A \cup \mathrm{cl}_n A \Leftrightarrow A = \mathrm{cl}_n A$．

定理 4　设 X 为拓扑空间．A，B 为 X 中的任意子集，则有

(1) $\mathrm{cl}_n(\varnothing) = \varnothing$

(2) $A \subset \mathrm{cl}_n A$

(3) $\mathrm{cl}_n(A \cup B) = \mathrm{cl}_n A \cup \mathrm{cl}_n B$

(4) $\mathrm{cl}_n(\mathrm{cl}_n A) = \mathrm{cl}_n A$

由定理 1 及定义 3 直接推出．

定理 5　设 $A \subset X$，$\mathrm{cl}_n A$ 为所有包含 A 的正则闭集之交．

证　令 $\boldsymbol{F}(A) = \bigcap \{F : F \supset A$ 且 F 是正则闭集$\}$．现证 $\boldsymbol{F}(A) = \mathrm{cl}_n A$．若 $x \notin \boldsymbol{F}(A)$，至少存在一个正则闭集 $F_x \supset A$，使 $x \notin F_x$．令 $Q_x = \sim F_x$，则 $Q_x \in RO(x)$．由于 $F_x \supset A$，故 $Q_x \cap A = \varnothing$．因而 $x \notin \mathrm{cl}_n A$．反之，$\forall\, y \notin \mathrm{cl}_n A$，则存在 $Q_y \in RO(y)$，使 $Q_y \cap A = \varnothing$．令 $F_y = \sim Q_y$，则 $F_y \supset A$ 且 $y \notin F_y$．从而 $y \notin \boldsymbol{F}(A)$．故 $\boldsymbol{F}(A) = \mathrm{cl}_n A$．

例 2　设 $(X, \boldsymbol{J})$ 如例 1．令 $B = \{x_2, x_3\}$．则 $B = \overline{B}$，但 $\mathrm{cl}_n B = X \supsetneq \overline{B}$．

定义 4　称 X 为可数近似紧空间，如果对 X 的每一个可数的正则开复盖都存在有限的子复盖．

定理 6　X 为可数近似紧空间 $\Leftrightarrow$ 对 X 中每一个具有有限交性质的可数正则闭集簇，其交非空．

证　X 是可数近似紧空间 $\Leftrightarrow$ 对 X 的每一个可数的正则开复盖都存在有限的子复盖 $\Leftrightarrow$ 如果 X 的某一可数正则开集簇的任何有限子簇都不能复盖 X，则这一可数正则开集簇也不能复盖 X．由 Demorgan 对偶原理，这又等价于：具有有限交性质的可数正则闭集簇，其交非空．

定义 5　称 X 是近似列紧空间，如果 X 中每一无限子集都有近似聚点．

显然列紧 $\Rightarrow$ 近似列紧．

定理 7　近似紧空间是近似列紧空间．

证　设 X 为近似紧空间，A 为 X 中任一无限子集，下证 A 有近似聚点．

否则，若 A 没有近似聚点，则 A 为近似闭集，由定理 2 知 $\sim A = \bigcup \{V_t : t \in T$ 且 V_t 是正则

开的}. $\forall x \in A$,由于 $x \overline{\in} \mathrm{cl}_n A$,故存在 $U_x \in RO(x)$,使 $U_x \cap (A \sim \{x\}) = \varnothing$,因而 $U_x \cap A = \{x\}$,显然集簇 $\{U_x : x \in A\} \cup \{V_t : t \in T$ 且 V_t 是正则开的$\}$ 为 X 的正则开复盖. 由于 X 是近似紧空间,因而存在有限的子覆盖,不妨设为 $\{U_{x_1}, U_{x_2}, \cdots, U_{x_n}\} \cup \{V_{t_1}, V_{t_2}, \cdots, V_{t_m}\}$. 显然 $\{U_{x_1}, U_{x_2}, \cdots, U_{x_n}\}$ 覆盖 A,从而 $A = (U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \cdots \cup U_{x_n}) \cap A = (U_{x_1} \cap A) \cup (U_{x_2} \cap A) \cup \cdots \cup (U_{x_n} \cap A) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. 即 A 为有限集,与前设矛盾. 定理得证.

拓扑空间 X 叫 T_1^* 型的[2](或称弱 T_2[3]),是指对 X 中每一点 x 以及异于 x 的每一点 y,x 有不包含 y 的正则开邻域.

引理 1 设 $X \in T_1^*$,$A \subset X$,则 $x \in \mathrm{cl}_n A \Leftrightarrow \forall U \in RO(x)$,都有 $U \cap (A \sim \{x\})$ 为无限集.

证 充分性是显然的,下证必要性,设 $x \in \mathrm{cl}_n A$,故 $\forall U \in RO(x)$,都有 $U \cap (A \sim \{x\}) \neq \varnothing$.因而存在 $y_0 \in U \cap (A \sim \{x\})$,由于 $X \in T_1^*$,故存在 $y_1 \in RO(x)$,使 $y_0 \overline{\in} V_x$. 令 $W = U \cap V_x$,则 $W \in RO(x)$,且 $y_0 \overline{\in} W$. 由于 $W \cap (A \sim \{x\}) \neq \varnothing$,故存在 $y_1 \in W \cap (A \sim \{x\})$,显然 $y_0 \neq y_1$,易于用归纳法构造出一个两两互不相同的点序列 $y_0, y_1, \cdots$,且每个 $y_i \in U \cap (A \sim \{x\})$,故 $U \cap (A \sim \{x\})$ 为无限集.

推论 $X \in T_1^*$,A 为有限集,则 $\mathrm{cl}_n A = \varnothing$.

定理 8 每一 T_1^* 型的近似列紧空间都是可数近似紧空间.

证 反证法,假定 X 不是可数近似紧空间. 据定理 6,存在一个具有有限交性质的可数正则闭集簇 $\boldsymbol{F} = \{F_i : i = 1, 2, \cdots\}$,但 $\cap \boldsymbol{F} = \varnothing$

现令 $P_1 = F_1, P_2 = F_1 \cap F_2, \cdots, P_i = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_i, \cdots, \forall i \in N$,显然 $P_i \neq \varnothing$,且每一 P_i 均是近似闭集(定理 5),$\cap P_i = \cap \boldsymbol{F} = \varnothing$,$P_i \supset P_{i+1}$.

在每一 P_i 内取一点 x_i,考虑集合 $A = \{x_i : i = 1, 2, \cdots\}$. A 若为有限集,则必有一点 $x \in A$. 满足条件:对于任意正整数 N,都存在 $n > N$,使得 $x_n = x$,于是 $x = x_n \in P_n \subset \cdots \subset P_N$. 即 $x \in P_N$ 对任意正整数都成立,从而 $x \in \cap P_i = \cap \boldsymbol{F}$. 这与假设矛盾.

A 若为无限集,由于 X 是近似列紧空间,因而 A 有近似聚点,不妨设为 y. 由引理 1 知,$\forall i = 1, 2, \cdots$,y 亦是 $A_i = \{x_i, x_{i+1}, \cdots\}$ 的近似聚点. 但 $A_i \subset P_i$,故 $y \in \mathrm{dn}A_i \subset \mathrm{dn}P_i \subset P_i$(由定理 1 及 P_i 是近似闭集),即 $y \in P_i$ 对每一 i 都成立,因而 $\cap P_i = \cap \boldsymbol{F} \neq \varnothing$,这亦与假设矛盾. 故定理成立.

定义 6 X 中序列 $\langle x_i \rangle$ 说是近似收敛的,若存在 $x \in X$, $\forall U \in RO(x)$,都存在 $M \in N$,使 $n > M$ 时,有 $x_n \in U$. x 称为序列 $\langle x_i \rangle$ 的近似极限点,这时亦称 $\langle x_i \rangle$ 近似收敛于 x,记为 $\langle x_i \rangle \xrightarrow[n]{} x$.

称 X 为近似序列紧空间,如果 X 中每一个序列都有近似收敛的子序列.

显然 $\langle x_i \rangle \to x \Rightarrow \langle x_i \rangle \xrightarrow[n]{} x$,因而序列紧空间是近似序列紧空间.

定理 9 在 Urysohn 空间中近似收敛的序列只有一个近似极限点.

证 利用 Urysonh 空间性质:"$\forall x \neq y$,都存在开集 U、V,使 $x \in U, y \in V$ 且 $\bar{U} \cap \bar{V} = \varnothing$". 易证该定理成立.

引理 2 设 X 为拓扑空间,如果 $A \sim \{x\}$ 中有序列近似收敛于 x,则 $x \in \mathrm{cl}_n A$.

证 设在 $A \sim \{x\}$ 中有序列 $\langle x_i \rangle \xrightarrow[n]{} x$,则 $\forall U \in RO(x)$,都有 $x_n \in U$,因此 $U \cap (A \sim$

$\{x\}) \neq \varnothing$，故 $x \in \mathrm{dn}A$.

定理 10　每一近似序列紧空间都是可数近似紧空间.

证　反证法，设 X 是近似序列紧空间，但 X 不是可数近似紧空间，因而存在 X 中具有有限交性质的可数正则闭集簇 $\{F_i : i = 1,2,\cdots\}$，但 $\bigcap F_i = \varnothing$.

现令 $P_i = \bigcap\{F_k : k = 1,2,\cdots,i\}$，$\forall\, i = 1,2,\cdots$. 则 $P_i \neq \varnothing$，$P_i \supset P_{i-1}$ 且 P_i 是近似闭集. 在每一 P_i 中取一点 x_i，则序列 $\langle x_i \rangle$ 有近似收敛的子序列 $\langle x_{N_i} \rangle$. 不妨设 $\langle x_{N_i} \rangle \xrightarrow[n]{} x$. 由于 $\forall\, i = 1,2,\cdots,x_{N_i},x_{N_{i-1}},\cdots,\in P_{N_i}$，由引理 2 知 $x \in \mathrm{dn}P_{N_i} \subset P_{N_i} \subset P_i$. 因而 $x \in \bigcap P_i = \bigcap F_i$，这与 $\bigcap F_i = \varnothing$ 矛盾，即 X 为可数近似紧空间.

现介绍文献〔4〕中的几个有关术语.

设 $(X,\boldsymbol{J})$ 是一个拓扑空间.

（Ⅰ）设 $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{J}$，如果 X 中每个正则开集都能表成 $\boldsymbol{A}$ 中一些成员之并，然后我们称 $\boldsymbol{A}$ 是空间 X 的几乎基.

（Ⅱ）设 $\boldsymbol{A}_x$ 表示点 x 的开邻域组成的某个集簇，如果 $\forall\, U \in RO(x)$，都存在 $A \in \boldsymbol{A}_x$，使 $x \in A \subset U$，则称 $\boldsymbol{A}_x$ 为点 x 的几乎局部基.

文献〔4〕中注 1.1 指出，如果 $\boldsymbol{A}$ 是 X 的几乎基，则 $\overline{\boldsymbol{A}}^0 = \{\overline{A}^0 : A \in \boldsymbol{A}\}$ 亦是 X 的几乎基. 若 $\boldsymbol{A}_x$ 是点 x 的几乎局部基，则 $\overline{\boldsymbol{A}}_x^0 = \{\overline{A}^0 : A \in \boldsymbol{A}_x\}$ 亦是点 x 的几乎局部基.

空间 X 说是几乎第二可数的，如果 X 有一个可数几乎基.

空间 X 说是几乎第一可数的，如果 $\forall\, x \in X$，都存在点 $x \in X$ 处的可数几乎局部基.

几乎第二可数 $\Rightarrow$ 几乎第一可数.

引理 3　若点 $x \in X$ 处有可数的几乎局部基，则在点 x 处有由正则开集组成的递缩可数几乎局部基.

证　显然在点 x 处有由正则开集组成的可数几乎局部基 $\boldsymbol{A} = \{A_i : i = 1,2,\cdots\}$，$\forall\, i = 1,2,\cdots$，令 $V_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_i$. 又令 $\boldsymbol{V} = \{V_i : i = 1,2,\cdots\}$，则 $\boldsymbol{V}$ 是点 x 处的由正则开集组成的可数几乎局部基且 $V_i \supset V_{i-1}$，$i = 1,2,\cdots$.

定理 11　每一 T_1^* 的满足几乎第一可数性公理的近似列紧空间都是近似序列紧空间.

证　设 $\langle x_i \rangle$ 为空间 X 中任一序列，若 $\langle x_i \rangle$ 的一切项组成的集是一个有限集，则 $\langle x_i \rangle$ 中至少有一项出现无限多次. 又若 $\langle x_i \rangle$ 的一切项组成一个无限集，依 X 是近似列紧空间，故 A 有一个近似聚点 x_0，由引理 1，在这两种情况下，都存在 $x \in X$，使得：$\forall\, U \in RO(x)$，U 中含有 $\langle x_i \rangle$ 中的无限多项.

由于 X 满足几乎第一可数性公理，据引理 3，存在点 x 处的由正则开集组成的递缩可数几乎局部基 $\langle W_i \rangle$，$\forall\, i$，$U \cap W_i \in RO(x)$，因而 $U \cap W_i$ 中含 $\langle x_i \rangle$ 中的无限多项，且 $U \cap W_{i-1} \subset U \cap W_i$.

令 i_1 为一下标数，使得 $x_{i_1} \in U \cap W_1$，用归纳法确定下标数 i_k 及序列 $\langle x_i \rangle$ 中一项 x_{ik}，使 $x_{ik} \in U \cap W_K$. 而令 $i_{k-1} > i_k$ 为任一下标数，使得 $x_{ik-1} \in U \cap W_{k-1}$. 于是得到自然数的一个严格递增数列 $\langle i_k \rangle$ 及与之对应的一个序列 $\langle y_k \rangle$，其中对每个 $K \in N$，$y_k = x_{nk}$. 故 $\langle y_k \rangle$ 是序列 $\langle x_i \rangle$ 的一个子序列，且 $\langle y_k \rangle \xrightarrow[n]{} x$.

定理 12　设 X 是满足几乎第二可数性公理的 T_1^* 空间，则下面命题等价.

(1) X 是近似紧空间

(2) X 是可数近似紧空间

(3) X 是近似列紧空间

(4) X 是近似序列紧空间

证 由于 X 有由正则开集组成的可数基，

则 (1)$\Leftrightarrow$(2) 显然的.

(3) $\Rightarrow$(2)(定理 8)，(1)$\Rightarrow$(3)(定理 7)，故 (1)$\Leftrightarrow$(2)$\Leftrightarrow$(3)，(4)$\Rightarrow$(2)(定理 10)，(3)$\Rightarrow$(4)(定理 11)，因而(1)$\Leftrightarrow$(2)$\Leftrightarrow$(3)$\Leftrightarrow$(4).

最后顺便指出，如果 X 是正则的，则显然有：近似列紧 $\Leftrightarrow$ 列紧，近似序列紧 $\Leftrightarrow$ 序列紧.

参 考 文 献

1 Gaal S A. Point set topology. New York and London，1964

2 王国俊. S－闭空间性质. 数学学报，1981，(1)：55～63

3 Herrman R A. RC－convergence Proc. Amer. Math. Soc. 1969，(75)，311～317

4 高印珠. 几乎第二可数性空间，几乎第一可数性空间和几乎可分空间. 数学研究与评论，1992，(1)：51～58

Subset Nearly Compact Spaces and Sequentally Nearly Compact Spaces

Waug Huoyun

Abstract In this paper，the concepts oi subset nearly compact spaces and sequentally nearly compact spaces are introduced. Some relationships among all kind nearly compact spaces are established.

Key Words Subset nearly compact；Sequentally nearly compact