

图的着色与色和*

邓毅雄

(基础课部)

摘要 引入了星色和与和谐色和的概念,并获得了它们的上、下界,最后讨论了图 eK_n 的色和,尤其是和谐色和.

关键词 图;着色;色和

分类号 O157.5

0 引言

图的着色是图论研究的一个重要课题,而且着色的方式有多种.本文的着色均指点着色,且所有颜色都为正整数.符号 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, $\langle x \rangle$ 表示不小于 x 的最小整数.文中未加定义的符号与术语均阅文献[1].

设 $G = (V, E)$ 是简单图, $|V| = n$, $|E| = e$, $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

定义1 图 G 的一个 k -着色 C 是满足:

(I) $C: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$;

(II) $\forall u, v \in V(G)$, 若 $uv \in E(G)$, 则 $C(u) \neq C(v)$ 的映射.

文献[2]、[3]讨论了此种着色意义下的色和,其定义为

定义2 图 G 的色和 $\sum(G)$ 为

$$\sum(G) = \min_c \left\{ \sum_{i=1}^n C(v_i) \mid C(v_i) \text{ 为图 } G \text{ 的点 } v_i \text{ 在着色 } C \text{ 下的着色} \right\}.$$

下面先介绍星着色与和谐着色的概念,再引入星色和与和谐色和的概念.

定义3 设 k 和 d 是正整数,且 $k \geq 2d$, 图 G 的 (k, d) -星着色 C 是满足下列条件的着色:

(I) $C: V \rightarrow Z_k$, 其中 $Z_k = \{1, 2, \dots, k\}$;

(II) $\forall uv \in E(G)$, $|C(u) - C(v)|_k \geq d$, 其中 $|x|_k = \min\{|x|, k - |x|\}$.

当然, $(k, 1)$ -星着色即为普通的 k -着色.

定义4 设 C 是图 G 的着色,如果 C 中的每一对颜色用在相邻点上至多一次,则称 C 是 G

收稿日期:1994-04-28.

邓毅雄,男,1963年生,讲师.

* 江西省自然科学基金资助课题

的和谐着色. 使 G 有和谐着色的最小颜色数, 称为和谐色数.

定义 5 图 G 的 (k, d) -星着色的星色和 $\sum S_d(G)$ 定义为

$$\sum S_d(G) = \min_C \{ \sum_{v \in V} C(v) \mid C \text{ 为 } G \text{ 的 } (k, d)\text{-星着色}, C(v) \text{ 为在 } C \text{ 下点 } v \text{ 的着色} \}.$$

定义 6 图 G 的和谐色和 $\sum H(G)$ 定义为

$$\sum H(G) = \min_C \{ \sum_{v \in V} C(v) \mid C \text{ 为 } G \text{ 的和谐着色}, C(v) \text{ 为在 } C \text{ 下点 } v \text{ 的着色} \}.$$

关于普通的色和文献[2]得到如下结果

定理^[2] 对任意 e 条边的 n 阶图, 色和

$$\sum(G) \leq n + e.$$

我们在此对其作点稍微的改进. 设 δ 为 G 的最小度, $\bar{d}$ 为 G 的平均度, 则 $\bar{d} = 2e/n \geq \delta, n \leq 2e/\delta$, 由上述定理得

$$\sum(G) \leq n + e \leq (2/\delta + 1)e \leq [2/\delta + 1]e.$$

当 $\delta \geq 4$ 时, 这个上界比文献[2]中定理 2 的上界更强.

下面我们着重讨论星色和与和谐色和.

1 图的星色和的上、下界

定理 1 任意图 $G = (V, E)$ 的 (k, d) -星色和 $\sum S_d(G) \leq n + de$.

证明 设 C 是 G 的 (k, d) -星着色, 考虑 G 的点的一个顺序: $v_1, v_2, \dots, v_n$, 使得 $C(v_1) \leq C(v_2) \leq \dots \leq C(v_n)$. 点 v_i 的下度 l_i 定义为下标小于 i 且与 v_i 邻接的点数, 同时点 v_i 的上度 u_i 定义为下标大于 i 且与 v_i 邻接的点数, 那么 $d_i \triangleq d(v_i) = l_i + u_i$. 由于每条边在下度(或上度)

中恰只计算一次, 故 $e = \sum_{i=1}^n l_i = \sum_{i=1}^n u_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i$.

由于星色和的最小性, 考虑用尽可能小的正整数给各点着色, 如

$$\begin{aligned} C(v_1) &= 1, \\ C(v_2) &= \begin{cases} 1, & \text{当 } v_1, v_2 \notin E \text{ 时}, \\ d + 1, & \text{当 } v_1 v_2 \in E \text{ 时}, \end{cases} \\ C(v_3) &= \begin{cases} 1, & \text{当 } v_1 v_3, v_2 v_3 \notin E \text{ 或 } v_1 v_3 \in E, v_2 v_3 \notin E \text{ 时}, \\ d + 1, & \text{当 } v_1 v_3 \in E, v_2 v_3 \notin E \text{ 时}, \\ 2d + 1, & \text{当 } v_1 v_3, v_2 v_3 \in E \text{ 时}, \end{cases} \end{aligned}$$

如此下去, 对任意点 v_i 的着色 $C(v_i)$, 由于 v_i 只有 l_i 个下度邻接点, 总存在不超过 $l_i d + 1$ 的颜色. 将它着在 v_i 上而保持星着色. 所以 $C(v_i) \leq l_i d + 1$. 故 $\sum S_d(G) \leq \sum_{i=1}^n C(v_i) \leq \sum_{i=1}^n (l_i d + 1) = n + de$.

显然当 $G = K_n$ 或 $\bar{K}_n$ 时, 达到此界.

定理 2 若 G 是 e 条边的连通图, 则

$$\sum S_d(G) \geq \lceil \sqrt{4(d+1)e} \rceil.$$

在证明定理2之前,注意到,图 G 是偶图当且仅当 G 是2-可着色.对应我们有

引理1 图 G 是偶图当且仅当 G 是 $(2d, d)$ -可星着色.

定理2的证明 先证在所有图中,偶图是星色和最小的图.设 G 是使星色和最小的图, C 是一个使 G 达到星色和且使 G 有尽可能多的点着色1的 (k, d) -星着色.用 a_i 表示着色 i 的点数.

若存在点 v 着色 $2d+j(j \geq 1)$,现构造图 G' 与 G'' ,其中 G' 是从 G 中删掉点 v ,并补充上两个点 x, y ,使 x, y 分别着色1与 $2d+j-1$,并在保持星着色情况下,使 x, y 邻接尽可能多的点.这样,最多删掉了 $n - a_{d-j-1} - a_{d-j-2} - \cdots - a_{3d-j-1}$ 条边,而至少增加了 $n - a_1 - a_2 - \cdots - a_d - 1$ 和 $n - a_{d-j} - \cdots - a_{3d-j-2}$ 条边,所以 G' 比 G 至少多 $(n - a_1 - a_2 - \cdots - a_d - a_{d-j} - 1) + a_{3d-j-1}$ 条边.由于

$$n = \sum_i a_i \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_d + a_{d-j} + a_{2d-j} \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_d + a_{d-j} + 1,$$

故 G' 比 G 至少多 a_{2d-j-1} 条边.

在 G' 的基础上,删掉一些边,得到 G'' ,使 G'' 也有 e 条边.此时有 $\sum S_d(G) = \sum S_d(G'')$,但 G'' 中着色1的点比 G 多,这与 C 是使 G 有尽可能多的点着色1矛盾,所以不存在点着色 $2d+j(j \geq 1)$.故 G 是 $(2d, d)$ -可星着色,即 G 是偶图.

现设 B 是一个有 e 条边的偶图,显然使 B 的星色和最小的着色为着1和 $d+1$.记 $a = a_1$, $n - a = a_{d+1}$.注意到,对任意偶图增加一些边构成完全偶图并不改变星色和.即

$$\sum S_d(B) = \sum S_d(K_{a, n-a}).$$

由于 $e \leq a(n-a)$,且 $a \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$,则

$$\sum S_d(B) = \sum S_d(K_{a, n-a}) = a + (d+1)(n-a) \geq a + \frac{(d+1)e}{a}.$$

设 $f(a) = a + (d+1)e/a$,则当 $a = \sqrt{(d+1)e}$ 时, $\min f(a) = \sqrt{4(d+1)e}$.故 $\sum S_d(B) \geq \{\sqrt{4(d+1)e}\}$.

综上所述,对任意连通图 G , $\sum S_d(G) \geq \sum S_d(B) \geq \{\sqrt{4(d+1)e}\}$.

2 和谐色和的上、下界

如果 e 条边的图 G 有和谐色数 h ,那么,由于每条边设计不同的颜色对(色对),则

引理2 设 h 为图 G 的和谐色数,则 G 的边数 $e \leq h(h-1)/2$.

另外显然有

引理3 设 G' 是 G 的生成子图,则 $\sum H(G) \geq \sum H(G')$.

引理4 设 G 是 n 阶完全偶图,则 $\sum H(G) = n(n+1)/2$.

定理3 设 Δ 是 G 的最大度,则 $\sum H(G) \geq (\Delta+1)(\Delta+2)/2$.

下面定理我们得到图的和谐色和的一个下界和一个平凡的上界.

定理4 对任意 e 条边的 n 阶图 G

$$n + e \leq \sum H(G) \leq n(n+1)/2.$$

证明 上界是显然的, 设 C 是使 G 达到和谐色和的和谐着色, h' 是 C 的颜色数, $t(i)$ 表示在 C 下, 色 i 的色类数, 而 h 是 G 的和谐色数. 显然 $h' \geq h$, 且 $\sum_{i=1}^{h'} t(i) = n$, 由于色和的最小性, 必有 $t(i) \geq 1$. 那么

$$\begin{aligned}\sum H(G) &= \sum_{i=1}^{h'} i \cdot t(i) = \sum_{i=1}^{h'} t(i) + \sum_{i=1}^{h'} (i-1)t(i) \\ &\geq n + \sum_{i=1}^{h'} (i-1) \geq n + \sum_{i=1}^h (i-1) \\ &= n + h(h-1)/2 \geq n + e.\end{aligned}$$

当 $G = K_n$ 时, 上、下界均可达.

虽然定理 4 的上界是平凡的, 但由引理 3-4 知, 当 G 包含某生成子图为完全偶图时, 此界恒达. 所以考虑和谐色和常着重于边数较少的图.

推论 2 若 Δ 是 G 的最大度, 则

$$\sum H(G) \geq \left(1 + \frac{2}{\Delta}\right)e.$$

3 图 eK_2 的色和

eK_2 是 e 个 K_2 的并图. 显然 $\sum (eK_2) = 3e$, $\sum S_d(eK_2) = (d+2)e$. 但 eK_2 的和谐色和则较复杂, 下面我们不加证明地给出它的和谐色数与和谐色和.

定理 5 图 eK_2 的和谐色数 $h = \{(1 + \sqrt{1+8e})/2\}$.

由引理 2 得到任意 e 条边的图的和谐色数 $h \geq \{(1 + \sqrt{1+8e})/2\}$, 定理 5 说明图 eK_2 恰好达到这个下界.

对任意色 i, j , 我们称 (i, j) 为由 i, j 构成的色对, $i+j$ 为其色对和.

引理 5 色对和不超过 $g+1$ 的所有色对的个数

(I) 当 g 为奇数时, 有 $(g^2-1)/4$ 个;

(II) 当 g 为偶数时, 有 $g^2/4$ 个.

考虑如下给 eK_2 着色: 在不重复设计同样色对的情况下, 使色对和尽可能小的色对设计在 eK_2 的分支上. 显然这样定能使 eK_2 达到和谐色和.

在如上着色后, 若 eK_2 的最大色对和为 $g+1$, 则由引理 5 有

(I) 当 g 为奇数时, $(g-1)^2/4 < e \leq (g^2-1)/4$;

(II) 当 g 为偶数时, $g(g-2)/4 < e \leq g^2/4$.

对于给定的 e , 总可以由上述两式之一求出正整数 g . 若 g 已求得, 则

定理 6

(1) 如果 g 是奇数, 且 $(g-1)^2/4 < e \leq (g^2-1)/4$, $r = (g^2-1)/4 - e$, 则

$$\sum H(eK_2) = (4g+9)(g^2-1)/24 - r(g+1);$$

(2) 如果 g 是偶数, 且 $g(g-2)/4 < e \leq g^2/4$, $r = g^2/4 - e$, 则

$$\sum H(eK_2) = (4g^2+9g+2)g/24 - r(g+1).$$

本文得到周尚超教授的指导,深表感谢.

参 考 文 献

- 1 Bondy J A, Murty U S R. Graph theory with Application. American Elsevier, New York, 1976
- 2 Thomassen C, Erdős P, et al. Tight Bounds on the Chromatic Sum of a Connected Graph. J Graph Theory, 1989, 353~357
- 3 Kubicka E. The Chromatic Sum of a Graph. ph D dissertation. Western Michigan Vniversity, 1989
- 4 Vince K. Star Chromatic Number. J Graph Theory, 1988, (12): 551~559
- 5 Bondy J A, Hell P. A Note on the Star Chromatic Number. J Graph theory, 1990, (4): 479~482
- 6 Beane D G, Biggs N L, et al. The Growth Rate of the Harmonious Chromatic Number. J Graph Theory, 1989, 291~299

The Coloring and Chromatic Sum of Graph

Deng Yixiong

Abstract This paper introduces the concept of star chromatic sum and harmonious chromatic sum, and get their upper bounds and lower bounds. At last, We discussed the chromatic Sum of graph eK_2 , especially the harmonious chromatic sum.

Key Words Graph; Coloring; Chromatic Sum