

完全图冠的优美性

吴 湃 敏

(基础课部)

摘 要 对 n 阶完全图的每一点均增加 S 个悬挂点的图记为 $I_s(K_n)$. 本文证明了当且仅当 $n \leq 9$ 时 $I_1(K_n)$ 为优美图, 并对 $I_2(K_n)$ 的优美性作了探讨.

关键词 完全图; 冠图; 优美图

分类号 O157. 5

本文所指的图均为无向单图, 文中未说明的符号和术语同于文献[1].

定义 1 设图 $G = (V, E)$, 若对于每一 $v \in V$, 存在一个非负整数 $\theta(v)$, 使得满足:

(1) $\forall u, v \in V, u \neq v \Rightarrow \theta(u) \neq \theta(v)$;

(2) $\max\{\theta(v) | v \in V\} = |E|$;

(3) $\forall e_1, e_2 \in E, e_1 \neq e_2 \Rightarrow \omega(e_1) \neq \omega(e_2)$.

其中 $\omega(e) = |\theta(u) - \theta(v)|, e = uv \in E$. 则称 G 为优美图, θ 为优美标号, ω 为边标号.

对于优美图 G 的一个优美标号 θ , 定义 G 的另一个标号 θ_1 如下:

$\forall v \in V(G), \theta_1(v) = |E(G)| - \theta(v)$, 显然 θ_1 也是 G 的优美标号, 此时称 θ 与 θ_1 是同构标号.

定义 2 对于 n 阶图 G , 如果在 G 的每个顶点均增加 S 条悬挂边 (这同时增加了 S 个悬挂点), 所得到的 $(S+1)n$ 阶图称为 G 的 S -冠图, 记为 $I_s(G)$, 1 -冠图简称为冠图.

文献[2]提出了求最小正整数 $f(K_n)$, 使得所有 K_n 的非负标号 $\leq f(K_n)$, 且在其导出的边标号下, 边的号数为互不相同的正整数. 例如 $f(K_5) = 11$, 当 K_5 的点标号为 $\{0, 1, 4, 9, 11\}$ 时, 边号数为: $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}$. 对于 $5 \leq n \leq 11$ 时, 文[2, 3]确定了 $f(K_n)$ 的值, 即有 $f(K_5) = 11, f(K_6) = 17, f(K_7) = 25, f(K_8) = 34, f(K_9) = 44, f(K_{10}) = 55, f(K_{11}) = 72$.

当 $n \geq 12$ 时, 确定 $f(K_n)$ 的值是非常困难的. 由 $f(K_n)$ 的定义, 易见

引理 1 若 K_n 为 G 的子图, 且 $|E(G)| < f(K_n)$, 则 G 不是优美图.

因此, 在研究具有较大完全子图的图的优美性时, 给出 $f(K_n)$ 的下界是很有意义的.

定理 1 当 $n \geq 12$ 时, $f(K_n) \geq \frac{3}{4}n^2 - \frac{11}{4}n + \frac{31}{6}$.

收稿日期: 1994-10-25.

吴湃敏, 女, 1945年生, 讲师.

证 设 θ 为 (K_n) 的一个非负标号, 且使最大的点标号数等于 $f(K_n)$, θ 所导出的边标号数为一些互不相同的正整数. 在 θ 下, K_n 的顶点标号数集为 $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 其中 $0 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$ (由 $f(K_n)$ 的定义不难看出: $x_1 = 0, f(K_n) = x_n$).

令 $y_i = x_{i-1} - x_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$, 则有 $x_n = f(K_n) = y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}$.

对于任意整数 i 和 $j, 1 \leq i \leq j \leq n-1$, 则 $y_i + y_{i+1} + \dots + y_j = S_{ij}$ 为 K_n 的一条边的标号数.

令: $A_1 = \{y_i | i = 1, 2, \dots, n-1\}$,

$A_2 = \{y_i + y_{i+1} | i = 1, 2, \dots, n-2\}$,

$A_3 = \{y_i + y_{i+1} + y_{i+2} | i = 1, 2, \dots, n-3\}$.

由于 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ 中的元素为互不相同的正整数, 考虑这 $3n-6$ 个元素之和

$$S = \sum_{x \in A_1} x + \sum_{x \in A_2} x + \sum_{x \in A_3} x \geq \sum_{i=1}^{3n-6} i,$$

$$\text{即有 } 3(y_1 + y_{n-1}) + 5(y_2 + y_{n-2}) + 6 \sum_{i=3}^{n-3} y_i \geq \frac{(3n-6)(3n-5)}{2}.$$

$$6 \sum_{i=1}^{n-1} y_i \geq \frac{(3n-6)(3n-5)}{2} + 3(y_1 + y_{n-1}) + (y_2 + y_{n-2}).$$

$$\text{即有 } 6f(K_n) \geq \frac{(3n-6)(3n-5)}{2} + 3(1+2) + (3+4),$$

$$f(K_n) \geq \frac{3}{4}n^2 - \frac{11}{4}n + \frac{31}{6}. \text{ 定理 1 证毕.}$$

推论 1 当 $n \geq 12$ 时, $I_1(K_n)$ 不是优美图. 事实上当 $n \geq 12$ 时, 由定理 1 可知:

$$f(K_n) > |E(I_1(K_n))| = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ 由引理 1 即得.}$$

同样地, 由定理 1 和引理 1 可得:

推论 2 当 $n \geq 16$ 时, $I_2(K_n)$ 不是优美图.

引理 2 $I_1(K_{10})$ 和 $I_1(K_{11})$ 不是优美图.

证 由于 $f(K_{11}) = 72$ (参见文献[2,3]), 而 $I_1(K_{11})$ 的边数为 66, 故由引理 1 知 $I_1(K_{11})$ 不优美.

对于 $I_1(K_{10})$, 虽然 $f(K_{10}) = 55$, 恰好等于 $I_1(K_{10})$ 的边数, 但文献[4]证明了 K_{10} 的非同构的顶点标号只有一种, 即其顶点标号数集为

$$A = \{0, 1, 6, 10, 23, 26, 34, 41, 53, 55\}.$$

下面证明 K_{10} 的这唯一(在同构意义下)的顶点标号不能扩充成为 $I_1(K_{10})$ 的优美标号.

事实上(反证), 若 K_{10} 的标号 A 能扩充为 $I_1(K_{10})$ 的优美标号, 考虑到在 $I_1(K_{10})$ 的边标号数中, 大于或等于 38 的数(边)有 18 个, 这些数对应的边在 K_{10} 中只有 10 条. 在 $I_1(K_{10})$ 的悬挂边中至多只有 7 条, 即只可能为 $\{0, 1, 6, 10, 41, 53, 55\}$ 中点邻接的悬挂边, 矛盾. 证毕

定理 2 当 $n \leq 9$ 时, $I_1(K_n)$ 是优美图; 当 $n \leq 10$ 时, $I_2(K_n)$ 是优美图.

证 为了方便起见, 我们用矩阵表示 $I_1(K_n)$ 和 $I_2(K_n)$ 的优美标号, 令

$$A_i = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_i \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_i \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_i \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_i \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_i \end{bmatrix}.$$

其中 A_i 表示 $I_1(K_i)$ 的标号, B_i 为 $I_2(K_i)$ 的标号, $\{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ 为 K_i 的顶点标号集, $\{b_1, b_2, \dots, b_i\}$ 和 $\{c_1, c_2, \dots, c_i\}$ 为悬挂点的标号集. a_i 邻接的悬挂点为 b_i (在 $I_2(K_i)$ 中还有 C_i).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 9 & 10 \\ 3 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 10 & 13 & 15 \\ 11 & 8 & 4 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 12 & 16 & 19 & 21 \\ 13 & 18 & 20 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix} \quad A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 11 & 19 & 23 & 26 & 28 \\ 20 & 25 & 17 & 6 & 9 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 10 & 21 & 29 & 34 & 36 \\ 14 & 23 & 22 & 33 & 9 & 13 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 12 & 25 & 27 & 35 & 41 & 44 \\ 45 & 34 & 42 & 43 & 4 & 9 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

不难验证 A_i 是 $I_1(K_i)$ 的优美标号 ($1 \leq i \leq 9$), 对于 $I_2(K_i)$ 的标号 B_i 如下:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 7 \\ 8 & 1 & 4 \\ 9 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 13 & 14 \\ 3 & 11 & 5 & 8 \\ 4 & 12 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 16 & 19 & 20 \\ 5 & 15 & 4 & 11 & 9 \\ 6 & 17 & 7 & 12 & 10 \end{pmatrix}$$

$$B_6 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 23 & 26 & 27 \\ 6 & 11 & 17 & 1 & 14 & 12 \\ 8 & 20 & 24 & 10 & 15 & 13 \end{pmatrix} \quad B_7 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 9 & 24 & 34 & 35 \\ 6 & 30 & 28 & 23 & 11 & 16 & 14 \\ 8 & 33 & 32 & 25 & 12 & 17 & 15 \end{pmatrix}$$

$$B_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 15 & 25 & 42 & 44 \\ 18 & 23 & 41 & 21 & 2 & 5 & 11 & 8 \\ 26 & 33 & 43 & 37 & 38 & 32 & 12 & 10 \end{pmatrix}$$

$$B_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 15 & 22 & 42 & 52 & 54 \\ 17 & 45 & 51 & 25 & 38 & 41 & 2 & 21 & 18 \\ 26 & 47 & 53 & 43 & 40 & 46 & 14 & 23 & 19 \end{pmatrix}$$

$$B_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 10 & 15 & 22 & 38 & 46 & 63 & 65 \\ 60 & 57 & 17 & 36 & 45 & 54 & 3 & 2 & 11 & 8 \\ 58 & 55 & 24 & 39 & 62 & 61 & 5 & 6 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

不难验证 B_s 为 $I_2(K_s)$ 的优美标号 ($1 \leq s \leq 10$).

证毕

综合上述, 我们证明了

定理 3 当且仅当 $n \leq 9$ 时, $I_1(K_n)$ 为优美图.

对于 K_n 的 2-冠图 $I_2(K_n)$, 本文证明了当 $n \leq 10$ 时是优美图, 当 $n \geq 16$ 时非优美图. 但当 $11 \leq n \leq 15$ 时, 这 5 个图的优美性有待于研究.

(本文曾蒙周尚超和徐保根两位同志指导, 作者在此表示感谢)

参 考 文 献

- 1 F·哈拉里. 图论. 上海: 上海科技出版社, 1980
- 2 Bermond J c. Graceful Graph Radio Antennae and French Windmills. In Proceedings of Open Univ. Conference, 1978, 18~37
- 3 Simmons G J. Synch Sets. A Variant of Difference Sets. Proc. 5TH. S-E Conf. Combinatorics. Graph Theory and Computer, 625~645
- 4 Bloom G S, Golomb S W. Numbered Complete Graphs, Unusual Rulers and Assorted Applications. In Theory and Applications of Graphs Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics, 1978. (642), 53~65
- 5 马克杰, 优美图. 北京: 北京大学出版社, 1991, 10

The Gracefulness on the Crown of Complete Graphs

Wu Baimin

Abstract Let $I_1(K_n)$ and $I_2(K_n)$ denote, respectively the crown and 2-crown of a complete graph K_n . In this paper, we prove that $I_1(K_n)$ is graceful if and only if $n \leq 9$, and discuss the gracefulness of $I_2(K_n)$.

Key Words Complete graph; Crown; Graceful graph