

圆柱形半透明介质腔的视在发射率

陈早生 黄世益

(基础课部)

摘要 从比耳-朗伯吸收定律出发,经过分析推导,得到了圆柱形半透明介质腔的单色视在发射率的计算式. 对材料组成相同但长径比不同的腔体进行了计算,并将结果与实验进行比较,发现计算结果与实验数据比较吻合.

关键词 黑体辐射;介质;视在发射率

分类号 O59

0 引言

由于计算机的出现和计算技术的提高,近年来,空腔辐射的理论和计算得到了很大的发展.^[1~3]然而,在以半透明介质作为腔体的介质腔的辐射理论及计算却发展很慢. 随着光纤传感系统的需要,人们制做了各种黑体腔式的温度传感头,其腔内不是空的,而是各种不同的半透明介质材料,因此,将这种腔体称为半透明介质腔. 这种腔体的出射辐射能是设计相应的光纤传感器装置的重要参数. 本文就圆柱形半透明介质腔的视在发射率进行分析和计算.

1 圆柱形介质腔的物理模型

以一个半透明介质的圆柱体外镀金属膜为例,其理想模型如下:

(1) 所镀金属膜其腔内表面均是漫射面;

(2) 腔的一个底面金属膜已磨掉并被抛光(图1),它作为辐射能的出射端面,处于 T_{∞} 的低温场中,而腔体的其它部分均被加热且成为温度为 T 的等温体,因为 $T \gg T_{\infty}$,所以 $T^4 - T_{\infty}^4 \approx T^4$.

以上两点和一般的空腔模型完全相同.^[1~3]

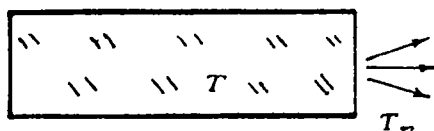


图1

收稿日期:1995-03-17.

陈早生,男,1950年生,讲师.

(3) 腔体介质材料是理想的无杂质、无缺陷、各向同性材料, 介质中的散射极弱可以不考虑. 这种理想的介质材料也已普遍用来研究介质的热辐射特性.^[4,5]

从图中可知, 腔壁内膜表面及介质材料的热辐射只能从温度为 T_1 处的端面出射. 本文的目的就是要找出出射端面的视在发射率 ϵ_v 与这介质腔各参量间的关系.

2 热辐射迁移方程

当波长为 λ 的光在介质中传播时, 光强度 I_λ 与传播距离 s 之间的关系由比耳-朗伯定律给出

$$I_\lambda = I_{\lambda 0} \cdot \exp[-k_\lambda \cdot s]. \quad (1)$$

本文仅研究单色光辐射, 因此, 相应的单色光记号 λ 在本文中一概略去, 故(1)式可简写为

$$I = I_0 \cdot \exp[-k \cdot s] \quad (2)$$

考虑到长为 s 的一段介质, 其本身也有热辐射, 忽略散射, 介质的发射因子为

$$1 - \exp[-k \cdot s].$$

故介质中任一点的辐射强度可表达为

$$I(s) = I_0 \cdot \exp[-k \cdot s] + I_b \cdot [1 - \exp(-k \cdot s)] \quad (3)$$

$$\text{即} \quad dI = -kI \, ds + kI_b \, ds \quad (4)$$

式中 I_0 ——初始处的单色光强;

$I(s)$ ——介质中离初始处为 s 的点的单色光强;

I_b ——黑体辐射的单色光强;

k ——介质材料的单色吸收系数.

(3)、(4)式为介质中的热辐射迁移方程, 又称辐射传递方程.

3 出射端面中心域的照度

对于圆柱形介质腔, 出射端面上任一点的辐射照度微元为:

$$dH = I(s) \cdot \cos \theta_1 \cdot d\Omega^{[6]}, \quad (5)$$

$$\text{而} \quad d\Omega = \frac{\cos \theta_2 \cdot d^2 A}{s^2}, \quad (6)$$

(5)式积分, 并将(3)式和(6)式代入, 可得到

$$H = \iint_{A_1-A_2} I_0 \exp(-ks) \frac{\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2}{s^2} d^2 A + \int_{2\pi} I_b [1 - \exp(-ks)] \cos \theta_1 d\Omega \quad (7)$$

式中 A_1 ——圆柱腔柱面面积;

A_2 ——圆柱腔底面面积.

4 圆柱形半透明介质腔的视在发射率

对于物体表面的单色半球发射率, 由定义可知

$$\epsilon = \frac{M}{M_b} \quad (8)$$

在研究腔体辐射时,因为人们常常把通过出射端面放射出去的能量与相等面积的黑体辐射能进行比较,这样得到的发射率人们称之为视在发射率(见文献[7]). 用 ϵ_v 表示视在发射率,则介质腔体的视在发射率为

$$\epsilon_v = t_i \cdot H/M_b, \quad (9)$$

即

$$\epsilon_v = \iint_{A_1} \frac{t_i \cdot \epsilon}{\pi} \cdot \exp(-ks) \frac{\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2}{s^2} d^2A + \iint_{A_2} \frac{t_i \cdot \epsilon}{\pi} \cdot \exp(-ks) \frac{\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2}{s^2} d^2A + \int_{\Omega} \frac{t_i}{\pi} \cdot [1 - \exp(-ks)] \cdot \cos \theta_1 d\Omega \quad (10)$$

这里,各个积分项中的 s 均表示发射点元到接受点之间的距离. 但随着积分区域的不同, s 的表达形式各不相同. t_i 是与积分变量无关的常量,因而可将(10)式改写为

$$\epsilon_v = t_i \cdot \epsilon_1 + t_i \cdot \epsilon_2 + t_i \cdot \epsilon_3 \quad (11)$$

$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 均为积分式,下面分别推证.

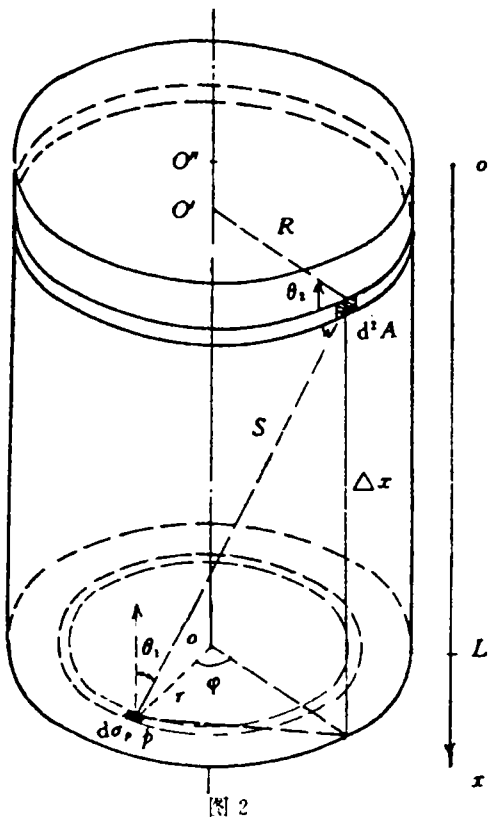


图2

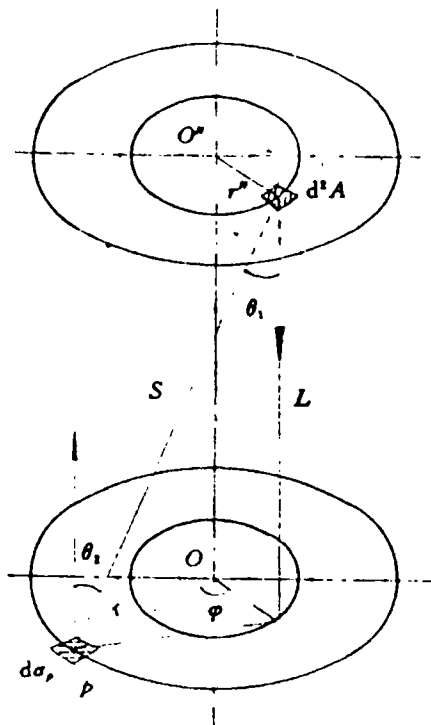


图3

如图2示,在圆柱面上任取面元 d^2A ,

$$d^2A = R \cdot d\varphi \cdot dx.$$

面元 d^2A 到出射端面任一 p 点的距离可表示为

$$s = s(x, \varphi) = \sqrt{\Delta x^2 + r^2 + R^2 - 2rR \cdot \cos \varphi}.$$

$$s(\varphi, x) = (\Delta x^2 + r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi)^{\frac{1}{2}};$$

$$s(r'', \varphi) = (L^2 + r^2 + r''^2 - 2rr'' \cos \varphi)^{\frac{1}{2}};$$

$$\Delta x = L - x;$$

R ——圆柱腔的底面半径;

r ——出射端面上任一点与中心的距离;

L ——圆柱腔的长度;

k ——介质材料的单色吸收系数;

ϵ ——镀膜材料的表面发射率.

注意到以上标出的几个 s 中还包含变量 r, β_0 和 F 也如此, 但 r 不是积分变量, 因此 $\epsilon_s = \epsilon_s(r)$. 此式说明, 当其它参量给出, 则可用 (12) 式算出在不同 r 点处的视在发射率分布.

一般情况下 $\epsilon_s = \epsilon_s(r, \epsilon, t_s, R, L, K)$.

这说明 (12) 式给出了 ϵ_s 与上面这些参数的关系.

再将 (12) 式应用到 $r=0$ 的出射端面中心, 并进行积分变量的无量纲化处理, 可得到

$$\begin{aligned} \epsilon_{s0} = & t_s \int_0^{\frac{L}{R}} 2\epsilon \left(\frac{L}{R} - x' \right) \frac{\exp \left[-kR \sqrt{\left(\frac{L}{R} - x' \right)^2 + 1} \right] dx'}{\left[\left(\frac{L}{R} - x' \right)^2 + 1 \right]^{\frac{3}{2}}} \\ & + t_s \int_0^1 2\epsilon \left(\frac{L}{R} \right)^2 \frac{\exp \left[-k \cdot R \sqrt{\left(\frac{L}{R} \right)^2 + r'^2} \right]}{\left[r'^2 + \left(\frac{L}{R} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} r' dr' \\ & + t_s \left\{ 1 - 2 \int_0^1 \mu \left[\exp \left(-\frac{kR}{\mu} \right) + \exp \left(-\frac{kR}{\mu} \cdot \frac{L}{R} \right) - \exp \left(-\frac{KR}{\mu} \cdot \sqrt{\frac{L^2}{R^2} + 1} \right) \right] d\mu \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

式中 $x' = \frac{x}{R}$; $r' = \frac{r''}{R}$; (r'' 是底面上任一点所对应的半径).

5 数值计算与实验结果的比较

根据 (13) 式, 本文对有关的实验进行了计算, 实验样品的材料参数与文献 [9~10] 中的参数非常吻合, 样品材料为人工熔融石英, 外镀银膜层. 计算结果见图 5.

有关参数值如下: $R=9.50\text{mm}$; $k=0.0401$; $\epsilon=0.07$; $t_s=0.9347$; $\frac{L}{R}$ 的值为 $0.3158n$, ($n=1, 2, \dots, 10$).

由图 5 可见计算结果与实验结果^[8]比较吻合.

6 结 论

1. 圆柱形半透明介质腔的视在发射率 ϵ_s 及 ϵ_{s0} 是一个多元函数, 在等温情况下, $\epsilon_{s0} = \epsilon_{s0}(\epsilon, R, \frac{L}{R}, k, t_s)$.

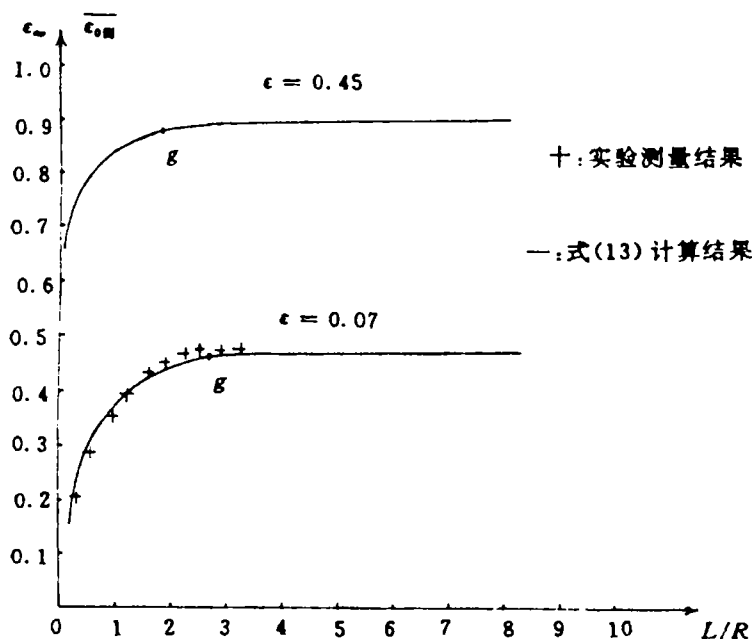


图 5

2. ϵ_{∞} 随腔体长径比 $\frac{L}{R}$ 变化的曲线存在一最佳点,设该点横坐标为 $\left(\frac{L}{R}\right)_*$,则在 $\frac{L}{R} < \left(\frac{L}{R}\right)_*$ 的区间内, ϵ_{∞} 急剧上升,在 $\frac{L}{R} > \left(\frac{L}{R}\right)_*$ 区间, ϵ_{∞} 基本不变.也即是说,当腔体的长径比达到 $\left(\frac{L}{R}\right)_*$ 时, ϵ_{∞} 随 $\frac{L}{R}$ 的增长非常缓慢.由此可知,在腔体设计时, $\frac{L}{R}$ 的取值无需很大,可将 $\left(\frac{L}{R}\right)_*$ 作为基准取值,这样,一可避免材料的浪费,降低成本.二可缩短腔体式传感头的响应时间,有利于瞬变温度的测量.

3. 当 k 值增大时,曲线最佳点的横坐标值 $\left(\frac{L}{R}\right)_*$ 则减小.与空腔相比,介质腔在更小的长径比时就能达到“无限深”空腔的辐射特性.

7 视在发射率与计算式的讨论与验证

在出射端面中心处,由于 $r=0$,所以有

$$F=R;$$

$$\beta_0 = \cos^{-1} \left[\frac{L}{\sqrt{R^2 + L^2}} \right];$$

$$s_1(\beta) = \frac{L}{\cos \beta}; \quad (0 \leq \beta \leq \beta_0)$$

$$s_2(\beta) = \frac{R}{\sin \beta}. \quad (\beta_0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2})$$

注意到,此时积分是关于 φ 的对称区间积分,所以在出射面中心 ϵ_s 的表达式为

$$\begin{aligned}
\epsilon_{s0} &= \frac{2\pi}{\pi} \left[\int_0^{\beta_0} \cos \beta \cdot \sin \beta \, d\beta + \int_{\beta_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos \beta \cdot \sin \beta \, d\beta \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{\beta_0} e^{-k \cdot s_1(\beta)} \cos \beta \cdot \sin \beta \, d\beta - \int_{\beta_0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-k \cdot s_2(\beta)} \cos \beta \cdot \sin \beta \, d\beta \right] \\
&= 1 - 2 \int_0^{\beta_0} e^{-k \cdot s_1(\beta)} \cos \beta \cdot \sin \beta \, d\beta - 2 \int_{\beta_0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-k \cdot s_2(\beta)} \cos \beta \cdot \sin \beta \, d\beta \quad (14)
\end{aligned}$$

利用变量变换并由于定积分值与积分变量的记号无关,可得到

$$\epsilon_{s0} = 1 - 2 \int_0^1 \mu \left[\exp\left(-\frac{kR}{\mu}\right) + \exp\left(-\frac{kR}{\mu} \cdot \frac{L}{R}\right) - \exp\left(-\frac{kR}{\mu} \cdot \sqrt{\frac{L^2}{R^2} + 1}\right) \right] d\mu. \quad (15)$$

求出 ϵ_{s0} , 即可从(13)式求得 ϵ_{∞} .

下面可以从(13)式的特定结果与实际的物理情况是否吻合来看(13)式的正确性.

按照指数积分定义

$$E_n(x) = \int_0^1 \mu^n e^{-\frac{x}{\mu}} d\mu \quad (16)$$

可知,(15)式可写为

$$\epsilon_{s0} = 1 - 2E_3(kR) - 2E_3(kL) + 2E_3(k\sqrt{R^2 + L^2}) \quad (17)$$

再由指数积分性质,当 $x=0$ 时, $E_n(0) = \frac{1}{n-1}, (n>1)$

所以 $E_3(0) = \frac{1}{2}$.

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $E_n(x) \rightarrow 0$.

(1) 当介质为真空,无介质辐射,则 $t_i \cdot \epsilon_{s0}$ 应该为 0.

验证真空时, $k=0$, (17)式为

$$\epsilon_{s0} = 1 - 2E_3(0) - 2E_3(0) + 2E_3(0) = 1 - 2 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = 0.$$

故 $t_i \cdot \epsilon_{s0} = 0$, 不存在介质材料的发射项.

(2) 当介质腔体增大, ϵ_{∞} 也随着变大,但 ϵ_{∞} 的值不因腔体的“无限增大”而超过 1. 换言之,就是 ϵ_{∞} 的极限值不会超过黑体表面的发射率值 1.

验证,当介质腔体很大时,有

$R \rightarrow \infty; L \rightarrow \infty$; 而吸收系数 $k \neq 0$, 所以(12)式的 $s(\varphi, x) \rightarrow \infty; s(r'', \varphi) \rightarrow \infty$; 因而导致(12)式的 $\exp[-k \cdot s(\varphi, x)] = 0$; 和 $\exp[-k \cdot s(r'', x)] = 0$. 即 $\epsilon_s(r)$ 的前面两积分项为 0, 这表明由圆柱腔内膜表面发射出来的辐射能还没到达出射端面就被衰减完毕. 所以,此情形下的视在发射率只是介质体热辐射贡献的结果. 此时

$$\begin{aligned}
\epsilon_{s0} &= 0 + 0 + t_i \cdot \epsilon_{s0} \\
&= t_i [1 - 2E_3(kR \rightarrow \infty) - 2E_3(KL \rightarrow \infty) + 2E_3(k\sqrt{R^2 + L^2} \rightarrow \infty)] \\
&= t_i \cdot [1 - 0 - 0 + 0] \\
&= t_i.
\end{aligned}$$

而任何介质材料的界面透射率 t_i 都是 ≤ 1 的, 当 $\epsilon_{\infty} = t_i \leq 1$, 即 ϵ_{∞} 的最大值是 1, 它符合物

理实际,即任何物体的发射率值都不会超过黑体的发射率 1.

从(1),(2)两点给出的验证结果与物理实际是完全吻合的,说明了(12),(13)式的精确性.

参 考 文 献

- 1 Bedford R E, Ma C K. J.O.S.A, 1974, 64(3): 339
- 2 Bedford R E, Ma C K, Chu Zaixiang, et al. Appl Opt, 1985, 24: 2971~2980
- 3 Chu Zaixiang, Bedford R E, Xu Wenhui, et al. Appl opt, 1989, 28: 1826~1829
- 4 Bevans J T, Dunnle R V. J Heat Transfer, 1960, C82, 1
- 5 Edwards D K. J heat Transfer, 1962, C84, 1
- 6 张幼文. 红外光学工程. 上海:上海科学技术出版社,1982
- 7 Sparrow E M, Cess R D. Radiation Heat Transfer. New York: Mc Graw - Hill Book Company, 1978
- 8 陈早生. 介质腔的有效辐射及其测温系统有效辐射功率的研究[硕士论文]. 1988
- 9 沃伦科娃 E M 著,北京玻璃研究所情报组译. 红外光学材料手册. 天津:编辑组出版,1973
- 10 上海科技情报所. 红外光学材料. 上海:上海科技情报所出版,1980

Apparent Emittance of Cylindrical

Enclosures Filled with a Semitransparent Medium

Chen Zaosheng Huang Shiyi

Abstract Through analysis and deduction, this paper obtains the calculating formulas of the monochromatic apparent emittance of cylindrical enclosures filled with a semitransparent medium from the Beer Lambert's Law. The calculations of all sizes of enclosures filled with a fixed medium are also in agreement with the experimental results.

Key words Blackbody emission; Medium; Apparent emittance