

关于法国风车的优美性*

周尚超

(基础课部)

摘 要 设 $B(4,1,m)$ 是具有一个公共点的 m 个 K_4 组成的图. J. C. Bermond 猜想当 $m \geq 4$ 时 $B(4,1,m)$ 是优美图. 本文证明了当 $4 \leq m \leq 13$ 时该猜想是成立的.

关键词 图; 优美图; 完全图

分类号 O157.5

0 引言

本文中的图均指无向简单图. 一个简单图 $G=(V,E)$, V, E 分别是 G 的顶点集和边集. 若对于每一个顶点 $u \in V$, 存在一个整数 $f(u)$ (称为顶点 u 的标号) 且满足条件: $0 \leq f(u) \leq |E|$, 任意两点的标号不相等, 由点标号导出的边标号 $|f(u_1) - f(u_2)|$ 各不相等, 则称 G 是优美图, f 称为 G 的优美标号.

1 定理

设 K_n 是 n 阶完全图, $B(n,r,m)$ 是具有一个公共 K_r 的 m 个 K_n 组成的图. 图 $B(4,1,m)$ 又称为法国风车. J. C. Bermond 提出如下猜想:

猜想^[1] 若 $m \geq 4$, 则 $B(4,1,m)$ 是优美图.

现已知的结果是, $m=2,3$ 时不是优美图. $m=4,5$ 时是优美图^[2]. 文献[3]中指出 W. H. Mills 用计算机证明了 $m=7,8$ 时是优美图. 另外 D. G. Rogers 证明了定理 1.

定理 1 若 $B(4,1,m)$ 是优美图, 则 $B(4,1,k)$ 也是优美图, 其中 $k \in \{5m+1, 13m+1, 19m+1, 25m+4, 49m+4, 125m+23, 133m+26, 133m+31, 361m+30\}$.

如果 f 是图 G 的优美标号, 则对任意 $u_i \in V$, 将 u_i 的标号 $f(u_i)$ 改为 $|E| - f(u_i)$ 后, 仍然是图 G 的一个优美标号, 这两种标号称为等阶的标号. 对于图 $B(4,1,m)$ 来说, 设我们已得到了一个优美标号, 其公共点的标号为 0. 设第 i 个子图的 4 个点的标号是 $0 < a_i < b_i < c_i$, 那么将这 4 个点的标号改为 $0 < c_i - b_i < c_i - a_i < c_i$ 后 (公共点仍为 0, 其它各子图的标号不变), 仍然是

收稿日期: 1994-10-24.

周尚超, 男, 1948 年生, 教授.

* 江西省自然科学基金资助课题

一个优美标号.这是因为在改变前后,这个子图的边的标号都是 $\{a_i, b_i, c_i, b_i - a_i, c_i - b_i, c_i - a_i\}$.这样,如果 $B(4, 1, m)$ 有一种优美标号,则它就有 2^m 种优美标号,其中任意两种我们也称为是等价的.我们用计算机对 $B(4, 1, m)$ 进行优美标号.对于每个 $m(\geq 4)$,都有许多种互不等价的优美标号,这一方面反映了该图是优美图的可能性增大,而另一方面又增加了寻找标号规律性的难度.根据等价性,我们可设第 i 个子图的4个点的标号 $0 < a_i < b_i < c_i$,其中 $a_i < c_i - b_i$,这样可减少计算时间.另外还存在满足某些特定条件的标号法,这种标号法只要确定每个子图的两个点的标号,而别外两个点的标号为0(公共点), $c_i = 6m - i + 1$.我们得到的结果见定理2.

定理2 若 $4 \leq m \leq 13$,则 $B(4, 1, m)$ 是优美图.且当 $5 \leq m \leq 13$ 时,存在 $B(4, 1, m)$ 的一种优美标号,满足下列条件:

(1) 公共点标号为0.

(2) 第 i 个子图的点标号为 $0 < a_i < b_i < c_i, a_i < c_i - b_i, a_i \geq m - i + 1, c_i = 6m - i + 1$.

而当 $m=4$ 时,不存在满足条件(2)的优美标号.

2 定理2的证明

这部分给出各个图的优美标号.公共点的标号为0,因此点的标号也是边的标号,“0”略去不写,用圆括号给出点的标号,用方括号给出另外三条边的标号.当 $m=4$ 时,我们给出了所有互不等价的所有标号(11种).它没有满足定理2中条件(2)的标号.当 $m>4$ 时,每个图都有许多种互不等价的标号,限于篇幅各绘出2种标号, $m=12, 13$ 时,由于计算时间太长,只算出1种.

2.1 $B(4, 1, 4)$ 的优美标号

- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| (1)(2, 10, 24), [8, 14, 22]; | (2)(2, 19, 24), [5, 17, 22]; |
| (1, 18, 21), [3, 17, 20]; | (7, 13, 23), [6, 10, 16]; |
| (4, 13, 19), [6, 9, 15]; | (1, 9, 21), [8, 12, 20]; |
| (7, 12, 23), [5, 11, 16]; | (3, 14, 18), [4, 11, 15]; |
| (3)(3, 16, 24), [8, 13, 21]; | (4)(3, 16, 24), [8, 13, 21]; |
| (4, 14, 23), [9, 10, 19]; | (4, 14, 23), [9, 10, 19]; |
| (2, 7, 22), [5, 15, 20]; | (2, 17, 22), [5, 15, 20]; |
| (1, 12, 18), [6, 11, 17]; | (6, 7, 18), [1, 11, 12]; |
| (5)(4, 13, 24), [9, 11, 20]; | (6)(4, 15, 24), [9, 11, 20]; |
| (1, 17, 23), [6, 16, 22]; | (1, 7, 23), [6, 16, 22]; |
| (2, 14, 21), [7, 12, 19]; | (3, 13, 21), [8, 10, 18]; |
| (3, 8, 18), [5, 10, 15]; | (2, 14, 19), [5, 12, 17]; |
| (7)(4, 15, 24), [9, 11, 20]; | (8)(4, 15, 24), [9, 11, 20]; |
| (1, 17, 23), [6, 16, 22]; | (1, 17, 23), [6, 16, 22]; |
| (2, 14, 21), [7, 12, 19]; | (3, 13, 21), [8, 10, 18]; |
| (5, 8, 18), [3, 10, 13]; | (5, 7, 19), [2, 12, 14]; |
| (9)(6, 14, 24), [8, 10, 18]; | (10)(6, 16, 24), [8, 10, 18]; |

- (1,20,23),[3,19,22];
 (5,12,21),[7,9,16];
 (2,13,17),[4,11,15];
 (11)(8,15,24),[7,9,16];
 (5,11,23),[6,12,18];
 (1,20,22),[2,19,21];
 (3,13,17),[4,10,14].

2.2 $B(4,1,5)$ 的优美标号

- (1)(8,14,30),[6,16,22];
 (9,10,29),[1,19,20];
 (4,11,28),[7,17,24];
 (2,15,27),[12,13,25];
 (3,21,26),[5,18,23];
- (2)(11,14,30),[3,16,19];
 (5,23,29),[6,18,24];
 (7,8,28),[1,20,21];
 (2,12,27),[10,15,25];
 (4,17,26),[9,13,22].

2.3 $B(4,1,6)$ 的优美标号

- (1)(6,13,36),[7,23,30];
 (9,10,35),[1,25,26];
 (14,16,34),[2,18,20];
 (5,22,33),[11,17,28];
 (3,24,32),[8,21,29];
 (4,19,31),[12,15,27];
- (2)(6,19,36),[13,17,30];
 (12,21,35),[9,14,23];
 (8,24,34),[10,16,26];
 (11,15,33),[4,18,22];
 (5,25,32),[7,20,27];
 (2,3,31),[1,28,29].

2.4 $B(4,1,7)$ 的优美标号

- (1)(7,34,42),[8,27,35];
 (10,12,41),[2,29,31];
 (15,18,40),[3,22,25];
 (11,20,39),[9,19,28];
 (5,21,38),[16,17,33];
 (13,14,37),[1,23,24];
 (4,30,36),[6,26,32];
- (2)(7,34,42),[8,27,35];
 (18,21,41),[3,20,23];
 (9,11,40),[2,29,31];
 (14,15,39),[1,24,25];
 (12,22,38),[10,16,26];
 (4,32,37),[5,28,33];
 (6,19,36),[13,17,30].

2.5 $B(4,1,8)$ 的优美标号

- (1)(8,39,48),[9,31,40];
 (11,33,47),[14,22,36];
 (16,21,46),[5,25,30];
 (10,28,45),[17,18,35];
 (6,32,44),[12,26,38];
 (19,20,43),[1,23,24];
 (13,15,42),[2,27,29];
 (4,7,41),[3,34,37];
- (2)(8,34,48),[14,26,40];
 (18,19,47),[1,28,29];
 (13,15,46),[2,31,33];
 (7,10,45),[3,35,38];
 (5,27,44),[17,22,39];
 (11,20,43),[9,23,32];
 (6,30,42),[12,24,36];
 (4,25,41),[16,21,37].

2.6 $B(4,1,9)$ 的优美标号

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| (1)(9,44,54),[10,35,45]; | (2)(9,44,54),[10,35,45]; |
| (11,41,53),[12,30,42]; | (11,40,53),[13,29,42]; |
| (16,18,52),[2,34,36]; | (14,37,52),[15,23,38]; |
| (13,37,51),[14,24,38]; | (17,24,51),[7,27,34]; |
| (19,27,50),[8,23,31]; | (18,22,50),[4,28,32]; |
| (17,20,49),[3,29,32]; | (16,19,49),[3,30,33]; |
| (5,33,48),[15,28,43]; | (5,36,48),[12,31,43]; |
| (21,25,47),[4,22,26]; | (6,8,47),[2,39,41]; |
| (6,7,46),[1,39,40]; | (20,21,46),[1,25,26]. |

2.7 $B(4,1,10)$ 的优美标号

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| (1)(10,49,60),[11,39,50]; | (2)(10,49,60),[11,39,50]; |
| (12,46,59),[13,34,47]; | (12,46,59),[13,34,47]; |
| (14,32,58),[18,26,44]; | (14,20,58),[6,38,44]; |
| (20,36,57),[16,21,37]; | (15,16,57),[1,41,42]; |
| (23,29,56),[6,27,33]; | (19,24,56),[5,32,37]; |
| (15,17,55),[2,38,40]; | (22,29,55),[7,26,33]; |
| (19,24,54),[5,30,35]; | (9,36,54),[18,27,45]; |
| (22,25,53),[3,28,31]; | (23,25,53),[2,28,30]; |
| (4,45,52),[7,41,48]; | (17,21,52),[4,31,35]; |
| (8,9,51),[1,42,43]; | (3,43,51),[8,40,48]. |

2.8 $B(4,1,11)$ 的优美标号

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| (1)(11,54,66),[12,43,55]; | (2)(11,54,66),[12,43,55]; |
| (14,50,65),[15,36,51]; | (14,50,65),[15,36,51]; |
| (19,27,64),[8,37,45]; | (20,27,64),[7,37,44]; |
| (25,30,63),[5,33,38]; | (25,30,63),[5,33,38]; |
| (20,22,62),[2,40,42]; | (17,40,62),[22,23,45]; |
| (26,32,61),[6,29,35]; | (26,32,61),[6,29,35]; |
| (16,39,60),[21,23,44]; | (19,21,60),[2,39,41]; |
| (13,31,59),[18,28,46]; | (13,31,59),[18,28,46]; |
| (17,24,58),[7,34,41]; | (16,24,58),[8,34,42]; |
| (9,10,57),[1,47,48]; | (9,10,57),[1,47,48]; |
| (3,52,56),[4,49,53]; | (3,52,56),[4,49,53]. |

2.9 $B(4,1,12)$ 的优美标号

- | | |
|------------------------|-----------------------|
| (12,59,72),[13,47,60]; | (25,28,66),[3,38,41]; |
| (14,56,71),[15,57,42]; | (7,55,65),[10,48,58]; |
| (16,53,70),[17,37,54]; | (21,29,64),[8,35,43]; |
| (18,49,69),[20,31,51]; | (19,24,63),[5,39,44]; |
| (22,23,68),[1,45,46]; | (26,30,62),[4,32,36]; |

(27,33,67),[6,34,40];

(9,11,61),[2,50,52].

2.10 $B(4,1,13)$ 的优美标号

(13,64,78),[14,51,65];

(19,23,71),[4,48,52];

(15,61,77),[16,46,62];

(30,32,70),[2,38,40];

(17,58,76),[18,41,59];

(26,36,69),[10,33,42];

(25,47,75),[22,28,50];

(5,39,68),[29,34,63];

(20,21,74),[1,53,54];

(11,55,67),[12,44,56];

(24,31,73),[7,42,49];

(6,9,66),[3,57,66].

(27,35,72),[8,37,45];

参 考 文 献

- 1 Bermond J C. Graceful Graphs, Radio Antennae and French Windmills. Graph Theory and Combinatorics, Pitman, London, 1979. 18~37
- 2 马克杰. 优美图. 北京:北京大学出版社,1991
- 3 Koh K M, Rogers D G Teo H K, et al. Graceful Graph; Some Further Results and Problems. Congressus Numerantium, 1980, 29:559~571

The Gracefulness of French Windmills

Zhou Shangchao

Abstract Let $B(n,r,m)$ be the graph consisting of m copies of K_n with a K_r in common, where K_n is complete graph. Bermond has conjectured that $B(n,1,m)$ is graceful for all $m \geq 4$. This paper proved the conjecture when $4 \leq m \leq 13$.

Key words Graph; Graceful graph; Complete graph