第12卷 第3期　　华东交通大学学报　　Vol.12 No.3
1995年 9月　　Journal of East China Jiaotong University　　Sep. 1995

关于Halin图的边面全着色数*

徐保根

（基础课部）

摘　要　设 $X_{ef}(G)$ 表示Halin图 G 的边面全色数．文献〔1〕中提出如下两个猜想：(1)对 $\Delta(G)=3$ 的Halin图 G，有 $4\leqslant X_{ef}(G)\leqslant 5$；(2)对 $\Delta(G)=6$ 的Halin图 G，有 $X_{ef}(G)=6$．其中 $\Delta(G)$ 表示图 G 的最大度数．本文证明了这两个猜想的正确性．

关键词　Halin图；平面图；面着色；边面全着色数

分类号　O157.5

0 引　言

定义1[1,2]　将阶数至少为4、每个非悬挂点(内点)度数至少为3的树 T 嵌入到平面内，再作一圈 C，按顺(或逆)时针方向依次连接 T 的所有悬挂点(叶点)，称这样构成的平面图 G 为Halin图，T 称为 G 的特征树，C 称为 G 的伴随圈．全体Halin图组成的集合记为 HT．

对简单平面图 $G(V,E,F)$，用 $V(G)$、$E(G)$ 和 $F(G)$ 分别表示 G 的点、边、面集合，有时分别简记为 V、E、F．对 $f_1, f_2\in F$，当且仅当 f_1 与 f_2 有公共边时，称 f_1 与 f_2 为相邻．面的边界上的边，称为与该面相关联．

定义2　对简单平面图 $G(V,E,F)$ 的面集 $F=\{f_1,f_2,\cdots,f_r\}$，记 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_s\}$ 为 s 种不同颜色的集合．每一个映射 $\sigma: F\to C$ 且使 F 中两个相邻面 f_1 和 f_2，均有 $\sigma(f_1)\neq\sigma(f_2)$，则称 σ 为 G 的一个 s-正常面着色．平面图 G 的面色数定义为 $X_F(G)=\min\{s|G$ 有 s-正常面着色$\}$．

定义3[1]　设简单平面 $G(V,E,F)$ 的边、面集合为 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_q\}$，$F=\{f_1,f_2,\cdots,f_r\}$．而 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_s\}$ 为 s 种不同颜色的集合，如果存在映射 $\sigma: E\cup F\to C$，且使 $E\cup F$ 中任何两个相邻或相关联的元素着为不同的颜色，则称 σ 为 G 的一个 s-正常边面全着色．平面图 G 的边面全色数定义为 $X_{ef}(G)=\min\{s|G$ 有 s-正常边面全着色$\}$．

Halin在研究平面图的Hamilton性时[3]，引入了Halin图的概念，得出了许多好的性质．文献〔2〕研究了其点色数、边色数和点边全色数．文献〔1〕研究其边面全色数，得出了好结果："若 G 为Halin图，且 $\Delta(G)\geqslant 7$ 时，$X_{ef}(G)=\Delta(G)$．"而对 $\Delta(G)$ 较小的Halin图，文献〔1〕中提出了本文摘要中所述的两个猜想，本文证明了其正确性．

收稿日期：1995-01-06.　　徐保根，男，1963年生，讲师．

*江西省自然科学基金资助课题

1 主要结论及其证明

本文所指的 Halin 图(简记 $G\in HT$),是指其嵌入平面内的简单平面图,其伴随圈上的点(即其特征树的悬挂点)均称为 G 的叶点,其余点称为内点.

定理 1 若 $G\in HT$,则图 G 的面色数,

$$X_F(G)=\begin{cases}3, & G\text{ 的内点度数均为偶数;}\\ 4, & \text{其它.}\end{cases}$$

证 情况 1,G 的内点度数均为偶数时,对图 G 的内点数目 l 运用归纳法:

当 $l=1$ 时,$G\cong W_{2n+1}$(奇数 $2n+1$ 阶轮图),($n\geqslant2$),此时,将 G 的内部面按顺(或逆)时针方向依次交替着第一和第二种颜色,外部面着第三种颜色,故图 G 可 3-面着色. 显然,不存在 G 的 2-面着色,因此,$X_c(G)=3$.

若情况 1 对于每一个具有 l 个内点的 Halin 图成立,现考虑具有 $l+1$ 个内点(其度数均为偶数)的 Halin 图 G. ($l\geqslant1$),设 w 为 G 的一个与叶点相邻的内点,w 的度 $d(w)=2n$ 为偶数($n\geqslant2$),w 点恰与 G 的另一个内点 u 邻接,且恰与 $2n-1$ 个叶点相邻.(由于 G 不是轮图,这样的内点 w 是存在的[1]). 按 G 的伴随圈逆时针方向依次记这 $2n-1$ 个叶点为 $v_1,v_2,\cdots,v_{2n-1}$. 如图 1 所示.

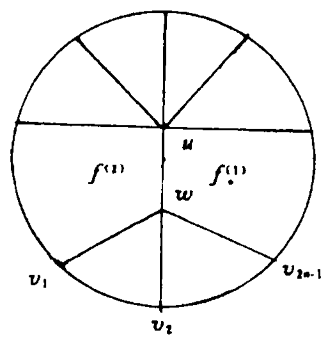

图 1

令 $G_1=G-\{wv_2,wv_3,\cdots,wv_{2n-1}\}$ 为图 1 中表示的图 G 去掉 $2n-2$ 条虚线边所得的图. 可见 G_1 为一个具有 l 个内点(且其度均为偶数)的 Halin 图 G^* 的同胚图. 并由归纳假设得 $X_F(G_1)=X_F(G^*)=3$. 记 σ_1 表示图 G_1 的 3-面着色映射. 在 G_1 中,与边 uw 相关联的两个面记为 $f^{(1)}$ 和 $f^{(2)}$. 在 G 中,与边 uw 相关 联的两个面记为 $f_*^{(1)}$ 和 $f^{(2)}$. 如图 1 所示,在图 G 中,与边 v_iv_{i+1} 相关联的内部面记为 $f_i(i=1,2,\cdots,2n-2)$. 定义 G 的面着色映射 σ 如下:

$$\sigma(f)=\begin{cases}\sigma_1(f), & f\in F(G_1);\\ \sigma_1(f^{(1)}), & f=f_*^{(1)};\\ \sigma_1(f^{(1)}), & f=f_i(i\text{ 为奇数});\\ \sigma_1(f^{(2)}), & f=f_i(i\text{ 为偶数}).\end{cases}$$

不难验证 σ 为图 G 的一个 3-面着色. 由归纳原理,定理对于情况 1 是成立的.

情况 2 若 G 中至少存在一个奇数度的内点 w,记 $d(w)=2n+1(n\geqslant1)$,与 w 点相关联的全部 $2n+1$ 个内部面依次记为 $f_1,f_2,\cdots,f_{2n+1}$,其中 f_i 与 f_{i+1} 相邻,($i=1,2,\cdots,2n$),f_{2n+1} 与 f_1 相邻,显然,在 G 的任意一个面着色中,这 $2n+1$ 个面至少需要三种不同的颜色. 又因为 G 为 Halin 图,这 $2n+1$ 个面均与外部面相邻,故外部面必须着有第四种颜色. 即 $X_F(G)\geqslant4$.

下证 $X_F(G)\leqslant4$;对 G 的面数 m 运用归纳法,由于 $G\in HT$,故 $m=|F(G)|\geqslant4$.

当 $m=4$ 时;$G\cong W_4$(4 阶轮图),结论显然成立.

若对于任意具有 m 个面的 Halin 图结论均成立,现考虑具有 $m+1$ 个面的 Halin 图 G. 如果 G 为轮图,则结论显然成立. 不妨设 G 不为轮图,则 G 中至少存在一个内点 w,使得 w 至少与两个相邻的叶点 v_1 和 v_2 邻接,且恰与一个内点 u 相邻接.[1]

令　$G_1=G-\{wv_1\}$,可见 G_1 为一个具有 m 个面的 Halin 图 G^* 同胚图,由归纳假设得知:$X_F(G_1)=X_F(G^*)\leqslant 4$.

令　$\sigma_1:F(G_1)\to C=\{c_1,c_2,c_3,c_4\}$ 为 G_1 的一个 4-面着色. 在 G_1 中与边 uw 相关联的两个面为 f_1 和 f_2. 在 G 中与边 uw 相关的两个面为 f_1 和 f_2^*,与边 v_1v_2 相关联的内部面(三角面)为 f_Δ. G_1 和 G 有公共相同的外部面 f_0. 定义 G 的面着色如下:

$$\sigma(f)=\begin{cases}\sigma_1(f), & \text{当 } f\in F(G_1) \text{ 时;}\\ \sigma_1(f_2), & \text{当 } f=f_2^* \text{ 时;}\\ C\backslash\{\sigma_1(f_0),\sigma_1(f_1),\sigma_1(f_2)\}, & \text{当 } f=f_\Delta \text{ 时.}\end{cases}$$

可见 σ 为 G 的 4-面着色,即 $X_F(G)\leqslant 4$,由归纳原理,对一切 Halin 图 G,均有 $X_F(G)\leqslant 4$. 至此,定理 1 证毕.

定理 2　若 $G\in HT$,且 $\Delta(G)=3$,则 $4\leqslant X_e(G)\leqslant 5$.

证:由于 $G\in HT$,$\Delta(G)=3$,由 Halin 图的定义知 G 为 3-正则平面图. 再根据定理 1,$X_e(G)\geqslant X_F(G)=4$.

记 $C_0=\{0,1,2,3,4\}$ 为五种不同的颜色集.

令 $\sigma_1:F(G)\to C=\{1,2,3,4\}$ 为 G 的一个 4-面着色. 对于 G 的任意一边 e,与 e 相关联的两个面记为 $f_e^{(1)}$ 和 $f_e^{(2)}$.

定义 G 的一个边面全着色如下:

$$\sigma(x)=\begin{cases}\sigma_1(x), & x\in F(G);\\ (\sigma_1(f_e^{(1)})+\sigma_1(f_e^{(2)}))(\bmod 5), & x=e\in E(G).\end{cases}$$

其中 mod5 取非负最小剩余.

不难验证:σ 为 $E\cup F\to C_0$ 的一个边面全着色映射,即 $X_e(G)\leqslant 5$. 定理 2 证毕.

定理 3　若 $G\in HT$,且 $\Delta(G)=6$,则 $X_e(G)=6$.

证　由于 $X_e(G)\geqslant\Delta(G)=6$,故只需证明如下命题即可:

命题:若 $G\in HT$,且 $3\leqslant\Delta(G)\leqslant 6$,则图 G 可 6-边面全着色.

对图 G 的内点数目 l 运用归纳法;

当 $l=1$ 时,$G\cong W_P$ 为 P 阶轮图($P\leqq 7$),不难直接验证命题成立.

若命题对于任意一个具有 l 个内点的 Halin 图(其最大度不大于 6)成立,现考虑具有 $l+1$ 个内点的任意一个 Halin 图 $G(3\leqslant\Delta(G)\leqslant 6)$,$l\geqslant 1$,$G$ 不为轮图. 文献[1]得知,G 中至少存在一个内点 w,使得 w 恰与 G 的唯一的另一个内点 u 邻接,w 的其余邻点均为叶点. 记 w 点度 $d(w)=s(3\leqslant s\leqslant 6)$,与 w 相邻的这 $s-1$ 个叶点按 G 的伴随圈上逆时针方向依次记为 $v_1,v_2,\cdots,v_{s-1}$,如图 2 所示. 记与 v_1 相邻且异于 v_2 的叶点为 v_1^-,与 v_{s-1} 相邻且异于 v_{s-2} 的叶点为 v_{s-1}^+.

令 $G_1=G-w-v_2-v_3-\cdots-v_{s-1}+\{uv_1,v_1v_{s-1}^+\}$,$G_1$ 如图 3 所示,G_1 为具有 l 个内点的 Halin 图,且 $3\leqslant\Delta(G_1)\leqslant 6$,由归纳假设,$G_1$ 可 6-边面全着色,记 $C=\{c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6\}$ 表示 6

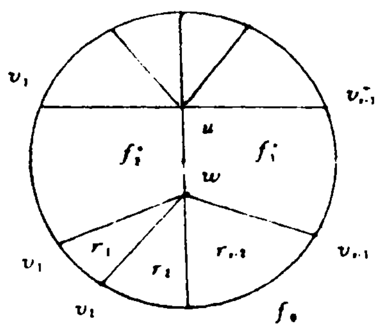

图 2

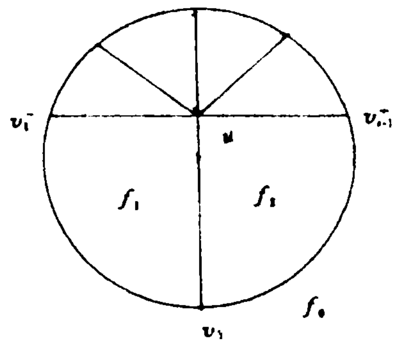

图 3

种不同颜色,令 $\sigma_1:E(G_1)\cup F(G_1)\to C$ 为 G_1 的一个 6-边面全着色映射,$I=\{uv_1, v_1v_1, v_1v_{s-1}^-, f_0, f_1, f_2\}$ 为 G_1 中的 6 个元素集.(如图 3 所示)

在 G 中,记 v_iv_{i-1} 相关联的内部面为 $r_i(i=1,2,\cdots,s-2)$,v_1v_1 相关联的内部面 f_2^*,$v_{s-1}v_{s-1}^-$ 相关联的内部面为 f_1^*.(如图 2 所示)

不妨设在 σ_1 下,I 中各元素着有两两相异的颜色[注1],下面定义 G 的边面全着色映射 σ,按 w 点的度数 s 分情况如下:

情形 1　$d(w)=s=3$ 时,令

$\sigma(f_1^*)=\sigma_1(f_1)$,　　$\sigma(wv_1)=\sigma_1(f_1)$,

$\sigma(f_2^*)=\sigma_1(f_2)$,　　$\sigma(wv_2)=\sigma_1(f_2)$,

$\sigma(uw)=\sigma_1(uv_1)$,　　$\sigma(v_1v_2)=\sigma_1(uv_1)$,

$\sigma(v_2v_2^-)=\sigma_1(v_1v_2^-)$,　　$\sigma(r_1)=\sigma_1(v_1v_2^-)$.

对于 G 中其余元素(边或面)的 σ 着色同于 σ_1 在 G_1 中对应元素的着色.

情形 2　$d(w)=s=4$ 时,令

$\sigma(f_1^*)=\sigma(v_2v_3)=\sigma(wv_1)=\sigma_1(f_1)$,

$\sigma(f_2^*)=\sigma(v_1v_2)=\sigma(wv_3)=\sigma_1(f_2)$,

$\sigma(uw)=\sigma_1(uv_1)$,　　$\sigma(r_1)=\sigma_1(v_1v_1)$,

$\sigma(wv_2)=\sigma_1(f_0)$,　　$\sigma(r_2)=\sigma(v_3v_3^-)=\sigma_1(v_1v_3^-)$.

σ 对于 G 中其余元素(边或面)的着色同于 σ_1 对于 G_1 中对应元素的着色.

情形 3　$d(w)=s=5$ 时,令

$\sigma(f_1^*)=\sigma(v_1w)=\sigma_1(f_1)$,　　$\sigma(f_2^*)=\sigma(v_2w)=\sigma_1(f_2)$,

$\sigma(uw)=\sigma(v_1v_2)=\sigma(v_3v_4)=\sigma(r_2)=\sigma_1(uv_1)$,

$\sigma(v_3w)=\sigma_1(v_1v_1)$,　　$\sigma(v_4w)=\sigma_1(f_0)$,

$\sigma(r_1)=\sigma(r_3)=\sigma(v_4v_4^-)=\sigma(v_1v_4^-)$.

σ 对于 G 中其余元素(边或面)的着色同于 σ_1 对于 G_1 中对应元素的着色.

情形 4　$d(w)=s=6$ 时,令

$\sigma(f_1^*)=\sigma(wv_1)=\sigma(v_2v_3)=\sigma_1(f_1)$，

$\sigma(f_2^*)=\sigma(wv_2)=\sigma(v_3v_4)=\sigma_1(f_2)$，

$\sigma(uw)=\sigma(r_1)=\sigma(r_3)=\sigma(v_4v_5)=\sigma_1(uv_1)$，

$\sigma(wv_3)=\sigma(r_4)=\sigma_1(v_1v_1)$，　　$\sigma(wv_5)=\sigma_1(f_0)$，

$\sigma(v_1v_2)=\sigma(r_2)=\sigma(wv_4)=\sigma(v_5v_5^-)=\sigma_1(v_1v_5^-)$.

同样地，σ 对 G 中其余元素的着色同于 σ_1 对 G_1 中对应元素的着色.

不难验证：上述情况 1～4 分别对 $d(w)=s$ 的所有不同值，分别给出了图 G 的一个 6－边面全着色. 由归纳原理，命题成立，定理证毕.

注 1　这里我们假定了 σ_1 对 I 中元素的着色互异. 如果 σ_1 对 I 中元素着色不全互异，称 σ_1 对 I 中着色相同的两个（至多两个）元素（一个为面，另一个为边）为 σ_1 下 I 中的同色对. 图 3 所示，同色对至多 3 个，且若 σ_1 下 I 中有 k 个同色对，则 σ_1 对 I 中元素着色未用上的颜色恰有 k 种（$k=1,2,3$）. 记为 $\{c_1,c_2,\cdots,c_k\}$.

令　$I^*=\{v_iv_{i-1}|i=1,2,\cdots,s-2\}\cup\{r_i|i=1,2,\cdots,s-2\}$，上述 k 个同色对记为 $\{x_1,y_1\}$，$\{x_2,y_2\},\cdots,\{x_k,y_k\}$，其中 x_i 为面，y_i 为边.（$i=1,2,\cdots,k$），$1\leqslant k\leqslant 3$. 即 $\sigma_1(x_i)=\sigma_1(y_i)$.

显然　$\{x_1,\cdots,x_k\}\subseteq\{f_0,f_1,f_2\}$，

$\{y_1,\cdots,y_k\}\subseteq\{uv_1,v_1v_1,v_1v_{i-1}^-\}$，

在定理证明中，我们定义的着色 σ（作为一种标号）作如下修正：

仅仅对于 I^* 中且在原来 σ 下标有 $\sigma_1(x_i)$ 的元素，现改其颜色为 C_i，而对原来标有 $\sigma_1(y_i)$ 的元素并不改变其原来的颜色（$i=1,2,\cdots,k$）. 对于其它元素 σ 不变. 这样修正后的 σ 为 G 的一个 6－边面全着色.

2　结束语

本文定理 2 和定理 3 分别肯定了文献〔1〕中两个猜想的正确性. 对于 Halin 图的边面全着色，本文结合文献〔1〕的结果，得出

结论　若 G 为 Halin 图，$X_e(G)$ 表示 G 的边面全色数，则：

$$X_e(G)\begin{cases}4 \text{ 或 } 5, & \Delta(G)=3;\\ 4 \text{ 或 } 5 \text{ 或 } 6, & \Delta(G)=4;\\ 5 \text{ 或 } 6, & \Delta(G)=5;\\ \Delta(G), & \Delta(G)\geqslant 6.\end{cases}$$

其中 $\Delta(G)$ 表示图 G 的最大度数.

参　考　文　献

1　张忠辅等. 最大度 Δ(Hg)≥7 及 Δ(Hg)=4,5,6 的 Halin 图的边面全色数. 兰州铁道学院学报，1993，12(4)：90～95

2　李鸿祥等. Halin 图的色性. 上海铁道学院学报，1994，15(1)：19～24

3　Halin R. Studies on minimal n－çonnected graph. In：Comb. Math. and its applications.（Proc. conf. Oxfod, 1969）. London：Academic press, 1969　（下转第 94 页）

以上就是企业资金的运动过程．换言之，就是企业资金的动态变化．在运动过程中，各种来源渠道的资金和各种运用形态的资金大都会保有一定量并保持一定的比例关系．这种资金在运动过程中的结构就是资金的动态结构．

这动态结构有两大特点：其一，在原有资金来源规模不变的条件下，资金来源结构和资金运用结构呈现出相互联系、彼此特约的变化；其二，由于企业劳动者的劳动，企业"创造"出了新的资金——纯收入资金，使资金来源总额增加了，也使资金运用结构和资金来源结构相应发生变化．

从这两大特点中我们可以引伸出企业家们在资金运筹方面的任务和职责，这就是：1．对各种资金来源和运用项目以最合理、科学的配置．这又包括：第一，以最小的资金成本筹借适时、适用、适量的资金；第二，对筹集的资金予以最合理、科学的运用，使资金充分发挥其作用．2．充分调动劳动者的积极性，以期用最小的资金耗费"创造"出尽可能多的新的资金．

现代企业的资金运筹，不仅是科学，更是艺术．这需要企业家们在实践中不断地摸索．本文只起抛砖引玉的作用，并以此就教于方家．

参 考 文 献

1 财政部注册会计师全国考试办公室编．经济法规汇编．大连：东北财经大学出版社，1994．172～211

2 中华人民共和国财政部．工业企业财务制度．北京：煤炭工业出版社，1993

（上接第 77 页）

4 胡冠章，张忠辅．关于平面图的边面全着色．清华大学学报（自然科学版），1992，32（3）：18～23

5 Bondy J A，Lovas2. Lengths of cycles in Halin graph，J. Graph Theory. 1985，(8)：397～410.

6 Bondy J A，Murty USR. Graph Theory with Applications. London：Macmillan press，1976

The Edge－Face Total Chromatic Number of Halin Graphs

Xu Baogen

Abstract Let $X_e(G)$ be the edge－face total chromatic number of a Halin graph G. In paper [1], two conjectures are proposed as follows：(1) If G is a Halin Graph, and $\Delta(G)=3$, then $4\leqslant X_e(G)\leqslant 5$；(2) If G is a Halin Graph, and $\Delta(G)=6$, then $X_e(G)=6$, where $\Delta(G)$ denotes the maximum degree of G. In this paper, that conjectures (1) and (2) are true is proved.

Key words Halin graph；Planar graph；Face chromatic number；Edge－face total chromatic number