第12卷第4期
1995年12月

华东交通大学学报
Journal of East China Jiaotong University

Vol. 12 No. 4
Dec. 1995

一类有序分拆的计数

周学松

(基础课部)

摘　要　讨论了分部量的限制条件中的数构成等差数列时有序分拆的计数问题. 使用了与文献[1]中不同的方法得到的结果分别统一和推广了文献[1]中定理 8.2.2 及系——定理 8.2.7 及系(定理 3)和定理 8.2.9——定理 8.2.14(定理 4)中的所有通解式.

关键词　分拆;独立点集;有向图;网络

分类号　O157.1

0　引　言

正整数 n 的一个分拆,是把 n 表成正整数的和 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k, n_i > 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant k, k \geqslant 1)$ 的一种表示法. 如果这个表示式不仅与各项的数值有关,而且与各项的次序有关,不同的次序认为是不同的表示法,这样的分析叫做一个有序分析. 表示式中的每一项 n_i 叫做一个分部,分部的个数叫做分部数,一个分部的数值叫做这个分部的容量,简称为分部量. n 的分拆的个数叫做 n 的分拆数. 分拆是非常有用的,有一类分配问题实质上就是一个分拆问题. 然而,求分拆的解并非易事. 柯召等[1]对分拆作了详细研究. 本文讨论了分部量的限制条件中的数构成等差数列时有序分拆的计数问题. 我们使用了与文献[1]中不同的方法得到的结果分别统一和推广了文献[1]中定理 8.2.2 及系——定理 8.2.7 及系和定理 8.2.9——定理 8.2.14 中的所有通解式.

本文采用符号与文献[1]中相同.

1　主要结果及证明

先看一个定义.

定义　设 $s \in N$ 或 $s = +\infty$,无穷阶矩阵 $A(s) = (a_{ij})_{+\infty \times +\infty}$ 的定义为:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (i,j) \in D_1 U D_2 \\ 0. & \text{否则} \end{cases}$$

收稿日期:1995-03-14.　　周学松,男,1956年生,副教授.

其中 $D_1 = \{(i,j) | 1 \leqslant i \leqslant s, j \leqslant i\}$, $D_2 = \{(i,j) | i = s + K, K = 1,2,\cdots, K < j \leqslant i\}$.

定理 1 恰具 K 个分部的有序分拆，如果对分部量的限制条件是：

$$A_i = \{p_{i1}, p_{i2}, \cdots, p_{is}\}, \qquad (1 \leqslant i \leqslant K, s \leqslant +\infty)$$

$p_{i1}, p_{i2}, \cdots, p_{is} (1 \leqslant i \leqslant K)$ 构成差为 q（与 i 无关）的等差数列，则此时分拆数

$$\overline{P}_{n,(K)}^{(A_1,A_2,\cdots,A_K)} = \begin{cases} a_{u,1}^{(K)}, \text{若} \sum_{i=1}^{K} p_{i1} \leqslant n = \sum_{i=1}^{K} p_{i1} + (u-1)q \leqslant \sum_{i=1}^{K} p_{is} \\ 0, \quad \text{否则} \end{cases}$$

其中 $a_{u,1}^{(K)}$ 是无穷阶矩阵 $A(s)$ 的 K 次幂 $A^K(s)$ 中第 u 行第 1 列处元的值.

证 设 $s < +\infty$（$s = +\infty$ 时类似可证明）.

首先视 K 个数集 $A_1, A_2, \cdots, A_K$ 为 K 个独立点集. 对于 A_1 中的每一点 $v_j^1 (= p_{1j})$ $(j = 1, 2, \cdots, s)$ 以其为起点向 A_2 中每一点（以其为终点）分别作有向弧；同时以 A_2 中每一点 $v_j^2 (= p_{2j})$ $(j = 1,2,\cdots,s)$（以其为起点）向 A_3 中每一点（以其为终点）作有向弧；依此下去，以 A_{K-1} 中每一点 $v_j^{K-1} (= p_{K-1,j})$ $(j = 1,2,\cdots,s)$（以其为起点）向 A_K 中每一点（以其为终点）分别作有向弧，由此得一有向图. 再在这个有向图中，对 A_i 与 $A_{i+1} (1 \leqslant i \leqslant K-2)$ 间的有向弧赋以一个权，这个权为该有向弧的起点对应的数值，而对于 A_{K-1} 与 A_K 间的有向弧的权为该有向弧的起点与终点对应的数值之和. 由此得一有向网络.

容易看到，求 n 满足定理 1 中限制条件的分拆数，转化为求上述有向网络中从 A_1 端到 A_K 端长度为 n 的不同道路数.

下面对 K 行数学归纳法来证 $A^K(s)$ 中第 u 行第一列处的元 $a_{u,1}^{(K)}$ 是上述有向网络中从一端到另一端长度为 $n = \sum_{i=1}^{K} p_{i1} + (u-1)q$ 的不同道路数.

$K = 2$ 时，先对 $A^2(s)$ 中的元 $a_{u,1}^{(2)}$ 关于 u 行数学归纳法.

$u = 1$ 时，$a_{11}^{(2)} = 1$，它恰好表示 A_1 与 A_2 构成的有向网络中，长度为 $n = \sum_{i=1}^{2} p_{i1}$ 的不同道路数是 1，结论成立.

假设 $u = T$ 时结论成立. $(1 \leqslant T \leqslant [\frac{s+1}{2}] - 1)$

即 $a_{T,1}^{(2)} = T$ 表示 A_1 与 A_2 构成的有向网络中，长度为 $n_T = \sum_{i=1}^{2} p_{i1} + (T-1)q$ 的不同道路数是 T.

如果定义 $f(x,y)$ 为长度是 $x + y$ 的道路，则在 A_1 与 A_2 构成的有向网络中的 T 条长度为 n_T 的道路只能是：

$$f(p_{11}, n_T - p_{11}), f(p_{12}, n_T - p_{12}), \cdots, f(p_{1T}, n_T - p_{1T}).$$

显然，在 A_1 与 A_2 构成的有向网络中，道路长度为 $n_{T+1} = \sum_{i=1}^{2} p_{i1} + [(T+1)-1]q$ 的不同道路也只能是：

$$f(p_{11}, n_{T+1} - p_{11}), f(p_{12}, n_{T+1} - p_{12}), \cdots, f(p_{1T}, n_{T+1} - p_{1T}), f(p_{1,T+1}, n_{T+1} - p_{1,T+1}).$$

这 $T + 1$ 条.

而 $a_{T+1,1}^{(2)}$ 恰好等于 $T + 1$.

于是，当 $1 \leqslant u \leqslant [\frac{s+1}{2}]$ 时结论成立. 由对称性可知，当 $[\frac{s+1}{2}]+1 \leqslant u \leqslant s$ 时，结论也成立.

故 $K=2$ 时，$A^2(S)$ 中的 $a_{u,1}^{(2)}$ 确实是 A_1 与 A_2 构成的有向网络中从 A_1 端到 A_2 端长度为 $n=\sum_{i=1}^{2} p_{i1}+(u-1)q$ 的不同道路数.

假设 $K=m$ 时，结论成立.

即 $A^m(s)$ 中元 $a_{u,1}^{(m)}$ 是 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 构成的有向网络中，从 A_1 端到 A_m 端具有长度为 $n=\sum_{i=1}^{m} p_{i1}+(u-1)q$ 的不同道路数.

下面来证明 $K=m+1$ 时结论也成立.

一方面，$a_{u,1}^{(m+1)}=a_{u,1}^{(m)}+a_{u,2}^{(m)}+\cdots+a_{u,s}^{(m)}$，　　(1)

另一方面，$m+1$ 个独立点集 $A_1, A_2, \cdots, A_{m+1}$ 构成的有向网络中从 A_1 端到 A_{m+1} 端长度为 $n=\sum_{i=1}^{m+1} p_{i1}+(u-1)q$ 的不同道路数为独立点集 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 与点 $v_j^{m+1}(=P_{m+1,j})$　$(j=1,2,\cdots,s)$ 构成的诸有向网络中从 A_1 端到 v_j^{m+1} 端长度为 $\sum_{i=1}^{m+1} p_{i1}+(u-1)q$ 诸不同道路数之和. 而这个和恰 好就是 m 个独立点集 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 构成的有向网络中从 A_1 端到 A_m 端长度为 $\sum_{i=1}^{m+1} p_{i1}+(u-1)q-p_{m+1,j}=\sum_{i=1}^{m} p_{i1}+[u-(j-1)-1]q$　$(j=1,2,\cdots,s)$ 的诸不同道路数之和. 由归纳假设知，它恰好就是 $a_{u,1}^{(m)}+a_{u-1,1}^{(m)}+\cdots+a_{u-(s-1),1}^{(m)}$.

由下面引理知，

$$a_{u,1}^{(m)}+a_{u-1,1}^{(m)}+\cdots+a_{u-(s-1),1}^{(m)}=a_{u,1}^{(m)}+a_{u,2}^{(m)}+\cdots+a_{u,s}^{(m)} \xlongequal{(1)} a_{u,1}^{(m+1)}.$$

故 $K=m+1$ 时结论确实成立.　(毕)

引理　在 $A^K(s)$ 中，等式 $a_{u,i+j}^{(K)}=a_{u-i,j}^{(K)}$，　$(0 \leqslant i \leqslant u-1)$ 成立.

证　$K=1$ 时，结论显然成立.

假设 $K=m$ 时，结论成立.

即　$a_{u,i+j}^{(m)}=a_{u-i,j}^{(m)}$　$(0 \leqslant i \leqslant u-1)$　$(1 \leqslant j \leqslant +\infty)$

则　$a_{u,i+j}^{(m+1)}=a_{u,i+j}^{(m)}+a_{u,i+j+1}^{(m)}+\cdots+a_{u,i+j+s}^{(m)}$

(归纳假设)

$$=a_{u-i,j}^{(m)}+a_{u-i,j+1}^{(m)}+\cdots+a_{u-i,j+s}^{(m)}=a_{u-i,j}^{(m+1)}.$$

由归纳法知引理成立.　(毕)

由定理 1 的证明过程易得

定理 2　恰具 K 个分部的有序分拆，如果对分部量的限制条件是

$$B_i=\{p_{i1}, p_{i2}, \cdots, p_{is}\},\qquad (s \leqslant +\infty, 1 \leqslant i \leqslant K-1)$$

$p_{i1}, p_{i2}, \cdots, p_{is}$ 构成差为 q(与 i 无关)的等差数列，B_K 为任意正整数集. 则此时分拆数

$$\overline{P}_{n,(K)}^{(B_1,B_2,\cdots,B_K)}=\begin{cases}\sum_{u\in H} a_{u,1}^{(K-1)}, H=\{u \mid n=p_{Kj}+\sum_{i=1}^{K-1} p_{i1}+(u-1)q, p_{u}\in B_K\}; \\ 0. \qquad 否则\end{cases}$$

其中 $a_{u,1}^{(K-1)}$ 是 $A^K(s)$ 中第 u 行第 1 列处元的值. 求和时，对 H 中重复的 u 要进行重复求和

由定理 1、定理 2 得本文主要结果：

定理 3 恰具 K 个分部的有序分拆，如果对分部量的限制条件是：

$$D_i^j=\{p_{i1}^j,p_{i2}^j,\cdots,p_{is}^j\}$$

$$(S_j\leqslant+\infty,i\in T_j,j=1,2,\cdots,d,\bigcup_{j=1}^{d}T_j=[1,K],j\neq j'\text{ 时},T_j\cap T_{j'}=\Phi)$$

$p_{i1}^j,p_{i2}^j,\cdots,p_{is}^j$ 构成差为 q_j(与 i 无关)的等差数列、则此时的分拆数

$$\overline{P}_{n,(K)}^{(D_1^1,\cdots,D_{|T_1|}^1,\cdots,D_1^d,\cdots,D_{|T_d|}^d)}$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{(u_1,\cdots,u_d)\in M}\prod\limits_{j=1}^{d}a_{u_j,1}^{(|T_j|)},M=\{(u_1,\cdots,u_d)\mid n=\sum\limits_{j=1}^{d}(\sum\limits_{i=1}^{|T_j|}p_{i1}^j+(u_j-1)q_j)\};\\ 0\quad,\qquad\qquad\text{否则}.\end{cases}$$

(定义 $a_{ij}^{(0)}=1$) $a_{u_j,1}^{(|T_j|)}$ 是 $A^{|T_j|}(s_j)$ 中第 u_j 行第 1 列处的元.

定理 4 如果对分部量的限制条件是：

$$E_i=\{p_{i1},p_{i2},\cdots,p_{is_i}\},\qquad(s_i\leqslant+\infty,1\leqslant i\leqslant l)$$

$p_{i1},p_{i2},\cdots,p_{is_i}$ 构成差为 q_i 的等差数列，则不少于 l 个分部的有序分拆数是

$$\overline{P}_{n,(\geqslant l)}^{(E_1,E_2,\cdots,E_l)}=\sum_{(|T_1|,\cdots,|T_l|)\in P}\ \sum_{(u_1,\cdots,u_l)\in Q}\ \prod_{i=1}^{l}a_{u_i,1}^{(|T_i|)},$$

其中 $P=\{(|T_1|,\cdots,|T_l|)\mid\sum\limits_{i=1}^{l}|T_i|\geqslant l\}$,

$$Q=\{(u_1,\cdots,u_l)\mid n=\sum_{i=1}^{l}(\sum_{j=1}^{|T_i|}p_{j1}+(u_i-1)q_i)\}.$$

2 结束语

最后本文发现，将 $K=3,q=4,p_i=i\quad(i=1,2,3),n=8$ 和 $K=3,s=4,n=4$ 分别代入文献[1]中定理 8.2.3 及系中的通解式得：

$$\overline{P}_{8,(3)}^{(\{1,2,3\},4)}=\sum_{0\leqslant i\leqslant3}(-1)^i\binom{3}{i}\binom{3+8-(1+2+3+4^i)-1}{2}=-1125,$$

$$\overline{P}_{4,(3)}^{([1,4])}=\sum_{0\leqslant j\leqslant3}(-1)^j\binom{3}{j}\binom{4-4j-1}{2}=0,$$

均与实际不符.

文献[1]中定理 8.2.5 及系，定理 8.2.7 及系和定理 8.2.12，定理 8.2.14 中的通解式有类似问题.

参 考 文 献

1 柯召，魏万迪．组合论（上册）．北京：科学出版社，1981

The Counting of an Order Partition

Zhou Xuesong

Abstract The counting problem of an order partition which has the limiting conditions: $A_i=\{p_{i1},p_{i2},\cdots,p_{is}\}(1\leqslant i\leqslant k,s\leqslant+\infty)$ where $p_{i1},p_{i2},\cdots,p_{is}$ is a equal difference sequence for its K parts is discussed in this paper. Throngh the method which is different to that used in document [1], some results are unified and many fomulars are extended.

Key words Partition; Independent point set; Digraph; Net work

---

（上接第 61 页）

Computation of Electromagnetic Force with Numerical Method

Xheng Xiaofang　Xu Fei

Abstract A computational principle and numerical method about electromagnetic force of electromagnetic womponent by numeuical computation are discussed in this paper. As an example of application, electromagnetic force of CZ0－150A electromagnetic contactor is analyzed. The good agreement is obtained between calculateed results and experriment date.

Key words Electromagnetic componetnt; Electromagnetic force; Numeuical computation