

图的集控制数*

于崇智

(基础课部)

摘要 设图 $G=(V,E)$. 一子集 $D\subset V$, 若对每一个 $X\subset V-D$, 都存在一个非空子集合 $Y\subset D$, 使得由 $X\cup Y$ 所导出的子图 $\langle X\cup Y \rangle$ 连通, 则称 D 为 G 的一个集控制集 (sd -集). G 的集控制数 $\gamma_s(G)$ 是 G 的一个集控制集的最小基数. 本文给出了集控制集的一个充要条件, 并讨论了生成子图与补图的集控制数.

关键词 图; 集控制集; 集控制数

分类号 O157.5

0 引言

设图 $G=(V,E)$. 一集 $D\subset V$, 若对 $V-D$ 中的任一顶点, 均有 D 内的某些顶点与之邻接, 则称 D 为 G 的一个控制集. 文献[1]中提出控制集的一个等价定义: 一集 $D\subset V$, 若对 $V-D$ 中的任一单点子集 $\{u\}$, 均存在 D 内的一个单点子集 $\{v\}$, 使导出子图 $\langle \{u,v\} \rangle$ 是连通的, 则称 D 为 G 的一个控制集. G 的控制数是 G 的一个控制集的最小基数, 记为 $\gamma(G)$.

一集 $D\subset V$, 若对 $V-D$ 的任一子集 X , 均存在一个非空子集 $Y\subset D$, 使得子图 $\langle X\cup Y \rangle$ 是连通的, 则称 D 为 G 的一个集控制集 (Setdominating set, 简称为 sd -集). 图 G 的一个 sd -集的最小基数称为 G 的集控制数 (Setdomination number), 记为 $\gamma_s(G)$.

本文没有定义的术语和符号见文献[2]. 本文中提及的图均为简单无向连通图.

1 sd -集的充要条件

定理 1 图 $G=(V,E)$. 若一集 $D\subset V$, 则 D 是 G 的一个 sd -集的充要条件是

- (1) D 为 G 的一个控制集;
- (2) $\forall u, v \in V-D$, u 与 v 在 G 内不邻接, 则必存在一条 D 内的 $u-v$ 通路 P .

收稿日期: 1995-06-13.

于崇智, 男, 1946年生, 副教授.

* 江西省自然科学基金项目

证明 必要性. 根据图的集控制集的定义, 当 X 取为单点集 $\{u\}$ 时, $u \in V - D$, 必存在 $Y \subset D$, 使 $\langle \{u\} \cup Y \rangle$ 连通. 可取 Y 为单点集 $\{u'\}$, $u' \in D$, 且 u 与 u' 在 G 内邻接, 故 G 的集控制集必为控制集.

当取 $X = \{u, v\} \subset V - D$, 且 u, v 在 G 内不邻接, 由定义, 必存在一非空子集 $Y \subset D$, 使 $\langle X \cup Y \rangle = \langle \{u, v\} \cup Y \rangle$ 连通. 连通图的任何两个顶点均有一条通路联结它们, 故必存在一条 D 内的 $u-v$ 通路 P .

充分性. 设 $D \subset V$, D 满足条件(1)和(2). 任取 $X \subset V - D$, 设导出子图

$$\langle X \rangle = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_r,$$

其中 $F_i (i=1, 2, \dots, r)$ 为 $\langle X \rangle$ 的连通分支. $\forall u \in F_i$, 则 $u \in V - D$, 由条件(1), D 内一定存在一点 u' 与之邻接, 因 F_i 连通, 故

$$F_i \cup D_i \quad (i=1, 2, \dots, r)$$

是 G 的一个连通子图, 其中 D_i 为这些 u' 点的集合.

$\forall u \in F_i, \forall v \in F_j, i \neq j$. 因为 u, v 不邻接, 由条件(2), 必存在一条 D 内的 $u-v$ 通路 P_{ij} , 使 uv 连通. 记

$$Y_{ij} = D_i \cup D_j \cup P_{ij} \subset D,$$

则 $F_i \cup F_j \cup Y_{ij}$ 构成 G 的一个连通子图. 由 F_i 和 F_j 取法的任意性及 r 的有限性, 取

$$Y = \bigcup Y_{ij},$$

则导出子图 $\langle X \cup Y \rangle$ 必连通.

2 生成子图的集控制数

设 H 为 $G=(V, E)$ 的生成子图. 现讨论 G 和 H 的集控制数的关系.

定理 2 若 H 是 G 的生成子图, 则 H 的一个 sd -集一定是 G 的 sd -集.

证明 设 D 是 H 的一个 sd -集, 故由定理 1, D 为 H 的控制集, 由生成子集定义, D 一定是 G 的一个控制集.

$\forall u, v \in V - D$, 且 u, v 在 G 内不邻接, 故 u, v 在 G 的生成子图 H 内亦不邻接, 由定理 1 的条件(2), 在 H 上必有 D 内的一条通路 P , 使 uv 连通. 由生成子图定义, H 上的 $u-v$ 通路 P 也是 G 上的一条 D 内的 $u-v$ 通路.

由定理 1, D 为 G 的一个 sd -集.

推论 1 若 H 是 G 的生成子图, 则

$$\gamma_s(G) \leq \gamma_s(H).$$

证明 由定理 2, H 的一个最小 sd -集仍是 G 的一个 sd -集, 故证.

3 图与补图的集控制数

定理 3 $\forall G$, 有 $\gamma_s(G) \leq n - \Delta$, 其中 n 为图 G 的顶点数, Δ 为 G 的最大度.

证明 设 u 为 G 的任一最大度点, 取

$$D = V - N(u),$$

这里 $N(u)$ 为点 u 的开邻域. 由定理 1, 知 D 必为 G 的一个 sd -集, 而

$$|D| = n - \Delta.$$

故证.

该定理结果不能改进.

取 $G=C_4$, 因 $\Delta(C_4)=2$, 顶点数为 4, 而 $\gamma_1(C_4)=2$, 正好达到不等式的上界.

定理 4 $\forall G$, 则 $\gamma_1(\bar{G}) \leq 1 + \delta$, 其中 δ 为 G 的最小度, $\bar{G}$ 是 G 的补图.

证明 设 u 为 G 的任一最小度点, u 与 G 中顶点 $v_1, v_2, \dots, v_\delta$ 相邻接. 取

$$D = \{u, v_1, v_2, \dots, v_\delta\}.$$

$|D|=1+\delta$. 显然 D 为 $\bar{G}$ 的一个控制集.

$\forall X \subset V - D$, 取 $Y = \{u\}$, 则 $\langle X \cup Y \rangle$ 在 $\bar{G}$ 上连通, 故由定义, D 为 $\bar{G}$ 的一个 sd -集, 所以, $\gamma_1(\bar{G}) \leq 1 + \delta$.

推论 2 设 T 为任一非平凡树, 则 $\gamma_1(\bar{T})=2$.

证明 从文献[2]知任何一棵非平凡树至少有二个度数为 1 的顶点, 故 $\delta(T)=1$. 由定理 4, 必有 $\gamma_1(\bar{T}) \leq 2$. 设 $\gamma_1(\bar{T})=1$, 则 $\bar{T}$ 中存在一个最小集控制集 $D=\{u\}$. 根据定理 1, D 是 $\bar{T}$ 的控制集, 所以 u 与 $\bar{T}$ 中的任一顶点邻接, 则 u 在 T 中为孤立点, 与 T 是非平凡树矛盾. 故证.

参 考 文 献

- 1 Sampathkumar E, Pushpa Latha. Set Domination in Graphs. Journal of Graph Theory, 18(5): 489~495
- 2 邦迪 J A, 默蒂 U S R. 吴望名等译. 图论及其应用. 北京: 科学出版社, 1984. 284
- 3 于崇智. 关于图的控制数的几点注记. 华东交通大学学报, 1991, 8(1): 36~41

Set Domination Number of Graphs

Yu Chongzhi

Abstract Let $G=(V, E)$ be a graph. A set $D \subset V$ is a set-dominating set (sd -set) if for every set $X \subset V - D$, and there exists a nonempty set $Y \subset D$, such that the subgraph $\langle X \cup Y \rangle$ induced by $X \cup Y$ is connected. The set-domination number $\gamma_1(G)$ of G is the minimum cardinality of a sd -set. In this paper a necessary and sufficient condition of a set-dominating set is given, and the set-domination number of its spanning subgraph and complement is discussed.

Key words Graph; Set dominating set; Set-domination number