第12卷第4期 华东交通大学学报 Vol.12 No.4
1995年12月 Journal of East China Jiaotong University Dec. 1995

序列和谐图及其扩充*

邓毅雄

(基础课部)

摘 要 讨论了序列和谐图的扩充,并由此得到某些重要图类的序列和谐性.

关键词 图;和谐图;序列和谐图;扩充

分类号 O157.5

0 引 言

本文只讨论简单无向图,未加定义的术语与符号均参阅文献[1].

图的和谐标号是图论的一类重要标号,具有一定的实际意义,目前已有许多结果[2].一般来说,证明图的和谐性都是直接给出其标号,然而对较复杂的图有时并非易事。另外,注意到关于和谐性的现有结果相对于优美性要少得多,从文献[2]可看到,象 $B(3,2,m)$,$B(4,3,m)$ 这样的重要图类的和谐性都未获证。本文通过讨论和谐标号的特殊情形——序列标号的扩充,较易地解决了此问题.

首先给出和谐图的定义

设 A、B 是两整数集,若 $B=\{b\equiv a(\mathrm{mod}q),a\in A$,其中 q 为某整数$\}$,则记 $B=A(\mathrm{mod}q)$.

对图 G,记 $|E|=|E(G)|$,$[E(G)]=\{0,1,\cdots,|E|-1\}$.设 $h:V(G)\longrightarrow[E(G)]$ 为单射,对于 $uv\in E(G)$,记 $\omega(uv)=h(u)+h(v)$,$\omega(E(G))=\{\omega(uv)|uv\in E(G)\}$,则 $\omega:E(G)\longrightarrow\omega(E(G))$ 是 h 的导出映射.

定义1 对图 G,若存在单射 $h:V(G)\longrightarrow[E(G)]$,使得 h 的导出映射 ω 也是单射,且 $\omega(E(G))=[E(G)](\mathrm{mod}|E|)$,则称 G 是和谐图,$h(v)$ 称为点 v 的和谐标号,$\omega(uv)$ 称为边 uv 的和谐值.

定义2 设 G 是和谐图,若存在和谐标号 h 和正整数 k,使得和谐值集 $\omega(E(G))=\{k,k+1,\cdots,k+|E|-1\}$,则称 G 为序列和谐图,h 称为 G 的序列标号,$\omega(uv)$ 称为边 uv 的序列和谐值.

收稿日期:1995-01-20. 邓毅雄,男,1963年生,讲师.

* 江西省自然科学基金资助

另外，关于树的和谐性本文规定：$h: V(G) \longrightarrow \{0,1,\cdots,|E|\}$.

在定义2中，当$G \neq K_1$时，必有$1 \leqslant k \leqslant |E|-2$. 显然图的序列标号一定是和谐标号，但和谐标号不一定是序列的. 然而，至今还未找到不能序列标号的和谐图，所以，考虑序列和谐图的扩充问题对讨论图的和谐性具有重要意义.

定义3 设h是图G的一个序列标号，若存在整数m,t.

令$H_{m,t}(G)=\{v \mid \forall\, i \in \{m,m+1,\cdots,m+t\}, \exists\, v \in V(G)$，使$h(v)=i\}$. 且满足

(1) $k-m+|E|+(j-1)(t+1) \notin \{h(v) \mid v \in V(G)\}\ (j \geqslant 1)$；

(2) $m \geqslant k-t$.

（这里k的意义同定义2），则称$H_{m,t}(G)$为图G在标号h下的一个可扩充点集，且$|H_{m,t}(G)|=t+1$.

定义3中的两条件都是用来保证将来扩充时，以$k-m+|E|+(j-1)(t+1)$作为新增加点的序列标号的可行性. 其中条件(1)说明$k-m+|E|+(j-1)(t+1)$在标号h下没有标在$V(G)$的任何点上，而条件(2)对应于$|E|+t \geqslant |E|+k-m$. 更一般地对应于$|E|+s(t+1)-1 \geqslant k-m+(s-1)(t+1)$. 这样，结合后面定理证明看到，当扩充$s$个点时，得到新图的边数为$|E|+s(t+1)$，而上面式子说明把$k+|E|-m+(s-1)(t+1)$作为新图的最大标号的可行性. 一个序列标号一定存在可扩充点集，且并非唯一. 特别可扩充点集的某些子集也是可扩充点集.

下面给出几个序列和谐图的标号与可扩充点集.

例1 当$m=1,2,3,4$时，完全图K_m是序列和谐图，其标号分别为：$\{0\}$，$\{0,1\}$，$\{0,1,2\}$，$\{0,1,2,4\}$. 而且$m=1,2,3$时，它们点集的全体均构成一个可扩充点集. 如对K_3，在该标号下，$k=1$，取$H_{0,2}=\{0,1,2\}$，其中$m=0,t=2$，则$k+|E|-m+(j-1(t+1)=4+(j-1-(t+1) \notin \{0,1,2\}$，且$m=0 \geqslant 1-2=k-t$. 另外$H_{0,2}=\{0,1,2\}$是$K_4$的一个可扩充点集（注：本例中用标号表示对应的点），这只要注意到$k=1,|E|=6$即可.

附2 当$n=1$或$3(\mathrm{mod}\,4)$时，C_n是序列和谐图，其标号为：（点的下标按某方向依次给出）

$$h(v_{2i-1})=i-1,\ h(v_{2i})=\frac{n-1}{2}+i \quad \left(i=1,2,\cdots,\frac{n+1}{2}\right)$$

在此标号下的标号集为$\{h(v) \mid v \in V(G)\}=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$，取$m=0,t=n-1$，由于$k=(n-1)/2$，则$H_0,n-1$即$C_n$的所有点的集合在此标号下都是可扩充点集.

例3 Petersen图是序列和谐图，其标号如图1. 其中和谐值集$\{\omega(uv) \mid uv \in E(G)\}=\{2,3,\cdots,16\}$故可取$m=2,t=14$，则$H_{2,14}$即Petersen图的所有点的集合是可扩充点集.

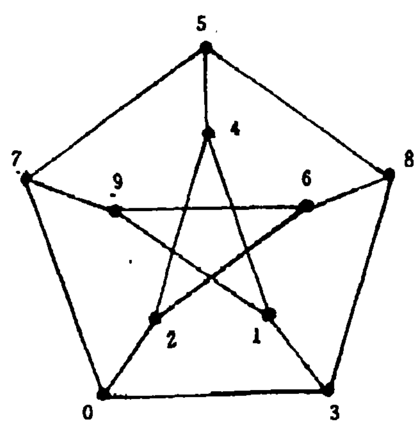

图1

设路P_n的点依次为$v_1,v_2,\cdots,v_n$，而P_n^{α}表示路P_n的α次幂. 从已有的结果我们易知P_n与P_n^2都是序列和谐

图[12],且所有点的集合构成一个可扩充点集.至于 $\alpha \geqslant 3$ 的情形,目前未见关于 P_n^α 的和谐性结果.下面我们给出关于 P_n^3 的和谐性的结论,至于 $\alpha \geqslant 4$ 时 P_n^α 的和谐性问题尚未解决.

例 4 P_n^3 是序列和谐图.

证明 显然 $|E(P_n^3)| = 3n - 6$,设单射

$$h: V(P_n^3) \longrightarrow \{0,1,\cdots,3n-7\}.$$

满足:$h(v_1) = 0, h(v_i) = i.\ (i = 2,3,4)$

$$h(v_5) = \begin{cases} 6r, & n = 4r+1; \\ 6r+2, & n = 4r+2; \\ 6r+4, & n = 4r+3; \\ 6r+6, & n = 4r+4. \end{cases} \qquad (r \geqslant 1).$$

$$h(v_{4i+l}) = h(v_{4i+l-4}) + 3 (1 \leqslant i \leqslant [\frac{n}{4}], 1 \leqslant l \leqslant 4).$$

易证上述标号为序列标号,故 P_n^3 是序列和谐图.

另外设 $H = \{v_{4k+2}, v_{4k+3}, v_{4k+4}, k = 0,1,\cdots,l.\ 0 \leqslant l \leqslant [\frac{n}{4}]\}$,由于 H 中点的标号集恰为 $\{2,3,4,\cdots,s\}$,其中

$$s = \begin{cases} n - [\frac{n}{4}]; & n \neq 4r \\ n + 1 - [\frac{n}{4}]. & n = 4r \end{cases}$$

由于在上述标号下,定义 2 中的 $k = 2$,取 $m = 2, t = s - 2$,即 $H_{m,t} = H$,它是一个可扩充点集.

关于序列标号我们也有下面性质:

性质 若 G 为序列和谐图,则存在序列标号 h,使 $\min\{h(v) | v \in V(G)\} = 0$.

证明 设 h' 是 G 的一个序列标号,其序列和谐值集为 $\{k, k+1, \cdots, k + |E| - 1\}$,显然 $k \geqslant 2\min\{h'(v)\} - 1$.

取 G 的另一标号为 $h(v) = h'(v) - min\{h'(v)\}, \in V(G)$,显然 $\min\{h(v)\} = 0$,且 h 的序列和谐值集为 $\{k - 2\min\{h'(v)\}, k - 2\min\{h'(v)\} + 1, \cdots, k - 2\min\{h'(v)\} + |E| - 1\}$ 从而 h 也是 G 的一个序列标号,且 $\min\{h(v)\} = 0$.

1 扩充定理

定理 1 若 G 是序列和谐图,$H_{m,t}(G)$ 是在标号 h 下的一个可扩充点集,$A = \{u_1, u_2, \cdots, u_s\}$ 是 $V(G)$ 外的一个孤立点集,则将 A 中各点分别与 $H_{m,t}(G)$ 中各点邻接得到的图 G' 也是序列和谐图.

证明 显然 $|E(G')| = |E| + s(t+1)$.设 h 的序列和谐值 $\omega(E(G)) = \{k, k+1, \cdots, k + |E| - 1\}$,$H_{m,t}(G) = \{v | \forall\, i \in \{m, m+1, \cdots, m+t\}, \exists\, v \in V(G)$,使 $h(v) = i\}$.

定义 G' 的标号 h' 为:

当 $v \in V(G)$ 时,$h'(v) = h(v)$;

当 $u_j \in A$ 时 $h'(u_j) = k + |E| - m + (j-1)(t+1)\ j = 1,2,\cdots,s.$

显然，由可扩充点集的定义知：h' 是单射，且 $h':V(G)\longrightarrow\{0,1,\cdots,|E(G')|-1\}$.

另外在 h' 下，

$$S_1\triangleq\omega(E(G))=\{k,k+1,\cdots,k+|E|-1\},$$

$$S_2\triangleq\{\omega(u_jv)\mid\omega(u_jv)=h'(u_j)+h'(v),u_j\in A,v\in H_{m,t}(G)\}$$
$$=\{k+|E|,k+|E|+1,\cdots,k+|E|+s(t+1)-1\},$$

则

$$S_1\cup S_2=\{k,k+1,\cdots,k+|E|+s(t+1)-1\}.$$

故 h' 是 G' 的序列标号，G' 为序列和谐图.

由定理 1 知，任一序列和谐图都可以通过其一个可扩充点集与某些孤立点邻接得到新的序列和谐图，这对证明某些复杂图的和谐性是十分方便的.

如由例 1 知星 $K_{1,n}=K_1+\overline{K_n}$ 是序列和谐图. 图 $B(n,r,m)$ 为具有一个公共 K_r 的 m 个 K_n 组成的图. 这类图的优美性已有不少人进行了研究（如文献[5,6,9,10]等），但其和谐性未见结果. 文献[2]中提出了 $B(3,2,m)$ 与 $B(4,3,m)$ 的和谐性猜想. 由于 $B(3,2,m)=K_2+\overline{K_m}$，$B(4,3,m)=K_3+\overline{K_m}$，而由例 1 及定理 1 我们立即得到它们的和谐性.

推论 1 图 $B(3,2,m)$，$B(4,3,m)$ 都是序列和谐图.

由例 2 及定理 1 我们将当 n 为奇数时，$C_n+\overline{K_t}(t=1,2)$ 为和谐图的结果推广到了如下的一般情形.

推论 2 当 $n=1$ 或 $3(\mathrm{mod}4)$ 时，$Cn+\overline{K_t}(t\geqslant 0)$ 是序列和谐图.

注意到星 K_1,n 是序列和谐图，且在其任一的序列标号下它的所有点的集为可扩充点集，所以我们有：

推论 3 $K_{1,n}+\overline{K_t}(t\geqslant 0)$ 是序列和谐图.

这个结果将现有的 $K_{1,n}+K_1$ 为和谐图的结果推广到了一般情况.

下面我们利用 P_n 的序列和谐性将现有 P_n+K_1 与 $P_n+\overline{K_2}$ 为和谐图的结果推广到一般.

推论 4 当 $\alpha=1,2$ 时，$P_n^\alpha+\overline{K_t}(t\geqslant 0)$ 是序列和谐图.

至此我们看到，利用定理 1，可以非常简便地得到一些重要图类的和谐性及序列和谐性.

最后，注意到冠图的优美性与和谐性备受该方面研究者的关注，本文以如下定理及其证明作为结束.

定理 2 设 G 是序列和谐图，h 是 G 的一个序列标号.

$$H_s(G)=\{v\mid\forall\, i\in\{0,2,\cdots,2s\},(s\geqslant 1),\exists\, v\in V(G),使\ h(v)=i\},$$

则在 $H_s(G)$ 的各点上分别增加 $t(t\geqslant 1)$ 条悬挂边得到的图 G' 也是序列和谐图.

证明 显然 $|E(G')|=|E|+(s+1)t$. 设 h 的序列和谐值集为 $\omega(E(G))=\{k,k+1,\cdots,k+|E|-1\}$，$v_{2l}$ 表示与标号为 $2l$ 的点邻接的悬挂点（$0\leqslant l\leqslant s,1\leqslant j\leqslant t$）. 定义 G' 的标号 h' 为：

(1) 当 $v\in V(G)$ 时，$h'(v)=h(v)$；

(2) $h'(v_{2l},j)=k+|E|+(j-1)(s+1)-l.$

$$(0\leqslant l\leqslant s,1\leqslant j\leqslant t)$$

易于验证此标号为 G' 的序列标号，故 G' 为序列和谐图.

（本文完稿后曾与周尚超教授商榷，并且审稿人也提出了宝贵的修改意见，在此一并深表感谢）

参 考 文 献

1 Bondy J A ,Murty USR. Graph Theory with Application. North－Holland,New York,1976

2 Gallian J A . A Survey:Recent Results,Conjectures,and Open Problems in Labeling Graphs. J. Graph Theory,1989,(4):491～504

3 马克杰.优美图.北京:北京大学出版社,1991

4 Grace T,On Seguential Labelings of Graphs. J. Graph Theory,1983,(7):195～201

5 Koh K M,Rogers D G,Lim C K. On Graceful Graphs:Sum Graph. Research Report 78,College of Graduate Studies,Nanyang University,1979

6 Bermond J C. Graceful Graphs,Radio Antennal and Freach Windmills. Graph Theory and Combinatories, Pitman,London,1979,13～37

7 邓毅雄.两类图的优美性与和谐性.华东交通大学学报,1993,10(4):53～59

8 徐保根.优美图的扩充.华东交通大学学报,1994,11(3):66～69

9 周尚超.图 B(n,2,2)的优美性.华东交通大学学报,1994,11(4):55～60

10 柳柏濂.关于优美图的最近结果.应用数学,1990,(4):108～110

Sequent－harmonious Graphs and Extension

Deng Yixiong

Abstract The extension of seguent－harmonious graphs are studied in this paper,and the seguent－harmoniousness of some important graphs are also given.

Key words Graph;Harmonious graph;Seguent－harmonious graph;Extension