

轨道结构的垂向振动特性*

圣小珍 吕绍棣

(土木工程系)

摘要 本文将轨道结构简化为用分布弹簧和阻尼器联系的双层梁,用振型分解法研究了在移动荷载作用下轨道结构的垂向振动特性。

关键词 高速铁路;轨道结构;振动

分类号 U213.212

0 引言

轨道结构的动力响应与列车速度有关,当列车速度很高时尤其如此.研究轨道结构的各种参数及列车速度对轨道结构动力响应的影响,借以优化轨道结构的参数,是一个十分重要的课题,得到众多学者的重视^[1~4].本文选用文献[4]的双层梁模型,用振型分解法研究在移动荷载作用下轨道结构的振动特性.本文方法只须求解若干个(例如10个)8元一次方程组即可,占用机时少,因此,便于讨论各种参数对振动特性的影响,并对参数进行优化.

1 力学模型及运动微分方程

轨道结构的力学模型如图1所示.上梁表示一根钢轨,其单位长度质量是 m_1 ,抗弯刚度是 $E_1 I_1$.

钢轨上受到一个以匀速 v 沿钢轨前进的交变荷载 $P(t) = P_0 + P_1 \sin \omega t + P_2 \cos \omega t$,用来模拟轮载.

下梁表示轨枕,轨枕之间的间距被忽略,认为是均匀无间隔地排列,因此,该梁的抗弯刚度取为零.单位长度质量为 m_2 (等于一根钢轨下面轨枕总的质量的一半除以钢轨长度).

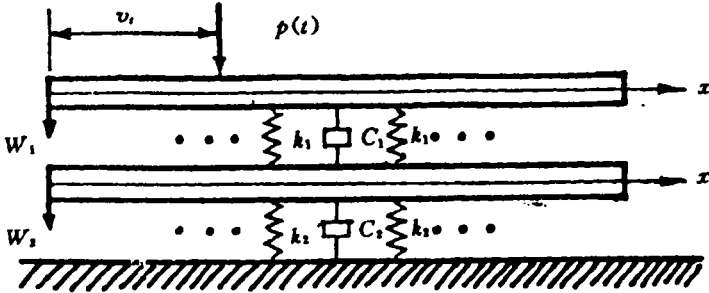


图1 力学模型

k_1, c_1 表示单位长度钢轨与轨枕之间的弹性系数和阻尼系数。

收稿日期:1995-06-21. 圣小珍,男,1962年生,副教授.

* 校立课题:“高速列车轨道结构的可行性分析”之理论分析部分.

k_2, c_2 表示单位长度枕梁下面的弹性系数和阻尼系数.

l 表示一根钢轨的长度.

上述模型忽略了道碴的质量. 要考虑道碴时, 把道碴质量并入轨枕中, 则上述模型依然可用.

令钢轨的垂向位移是 $w_1(x, t)$, 轨枕的垂向位移为 $w_2(x, t)$, 则容易写出运动微分方程如下

$$E_1 I_1 \frac{\partial^4 w_1(x, t)}{\partial x^4} + m_1 \frac{\partial^2 w_1(x, t)}{\partial t^2} + k_1 [w_1(x, t) - w_2(x, t)] + c_1 \left[\frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial w_2(x, t)}{\partial t} \right] = \delta(x - vt) P(t), \quad (1)$$

$$m_2 \frac{\partial^2 w_2(x, t)}{\partial t^2} + k_1 [w_2(x, t) - w_1(x, t)] + c_1 \left[\frac{\partial w_2(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial w_1(x, t)}{\partial t} \right] + k_2 w_2(x, t) + c_2 \frac{\partial w_2(x, t)}{\partial t} = 0. \quad (2)$$

其中 $\delta(x)$ 是狄拉克 δ -函数.

2 轨道结构垂向振动的固有圆频率和振型

在式(1), (2) 中忽略阻尼及外激振力, 得自由振动微分方程

$$E_1 I_1 \frac{\partial^4 w_1(x, t)}{\partial x^4} + m_1 \frac{\partial^2 w_1(x, t)}{\partial t^2} + k_1 [w_1(x, t) - w_2(x, t)] = 0, \quad (3)$$

$$m_2 \frac{\partial^2 w_2(x, t)}{\partial t^2} + k_1 [w_2(x, t) - w_1(x, t)] + k_2 w_2(x, t) = 0, \quad (4)$$

在式(3), (4) 中令

$$\left. \begin{aligned} w_1(x, t) &= U(x) e^{j\omega_n t}, \\ w_2(x, t) &= V(x) e^{j\omega_n t}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中 $U(x), V(x)$ 分别是钢轨和轨枕的振型函数, ω_n 是轨道结构的固有圆频率, $j = \sqrt{-1}$. 将式(5)代入式(3), (4) 得

$$E_1 I_1 \frac{d^4 U(x)}{dx^4} - m_1 \omega_n^2 U(x) + k_1 [U(x) - V(x)] = 0, \quad (6)$$

$$-m_2 \omega_n^2 V(x) + k_1 [V(x) - U(x)] + k_2 V(x) = 0, \quad (7)$$

由(7)得

$$V(x) = \frac{k_1 U(x)}{k_1 + k_2 - m_2 \omega_n^2}. \quad (8)$$

式(8)表明, 轨枕的振型与钢轨的振型成比例. 将式(8)代入式(6)得

$$E_1 I_1 \frac{d^4 U(x)}{dx^4} + \frac{(k_1 - m_1 \omega_n^2)(k_1 + k_2 - m_2 \omega_n^2) - k_1^2}{k_1 + k_2 - m_2 \omega_n^2} U(x) = 0.$$

令

$$\beta^4 = \frac{k_1^2 - (k_1 - m_1 \omega_n^2)(k_1 + k_2 - m_2 \omega_n^2)}{E_1 I_1 (k_1 + k_2 - m_2 \omega_n^2)}, \quad (9)$$

则有

$$\frac{d^4 U(x)}{dx^4} - \beta^4 U(x) = 0. \quad (10)$$

式(10)表明, 钢轨振型函数所满足的微分方程与普通欧拉梁的振型函数所满足的微分方程是相同的^[5]. 由钢轨两端的边界条件即可确定频率方程. 本文略去轨头板的约束作用, 将钢轨的两端视为自由端. 从文献[6]知频率方程为

$$\cos \beta l = \frac{1}{\operatorname{ch} \beta l}, \quad (11)$$

振型函数为

$$U(x) = (\cos \beta l - \operatorname{ch} \beta l)(\cos \beta x + \operatorname{ch} \beta x) + (\sin \beta l + \operatorname{sh} \beta l)(\sin \beta x + \operatorname{sh} \beta x). \quad (12)$$

(对应 $\beta = 0$ 时有两个刚性振型: $U_1(x) = l$, $U_2(x) = x - l/2$).

由式(11)可解出一系列 β_i 来,代入式(12)得 $U_i(x)$ ($i = 3, 4, 5, \dots$). 当 $r \neq s$ 时,有如下正交关系:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l U_r(x) U_s(x) dx &= 0, \\ \int_0^l U_r'(x) U_s'(x) dx &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (r, s = 1, 2, \dots) \quad (13)$$

3 方程(1)(2)的求解

$$\left. \begin{aligned} w_1(x, t) &= \sum_i U_i(x) q_i(t), \\ w_2(x, t) &= \sum_i U_i(x) p_i(t). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

代入式(1)(2)后两边乘以 $U_r(x)$, 两边从 0 到 l 积分, 利用振型的正交性有

$$\begin{aligned} [m_1 \int_0^l U_r^2(x) dx] \ddot{q}_r(t) + [c_1 \int_0^l U_r^2(x) dx] (\dot{q}_r(t) - \dot{p}_r(t)) + [E_1 I_1 \int_0^l U_r^2(x) dx] q_r(t) \\ + [k_1 \int_0^l U_r^2(x) dx] (q_r(t) - p_r(t)) = U_r(vt) P(t) \quad (r = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} [m_2 \int_0^l U_r^2(x) dx] \ddot{p}_r(t) + [c_1 \int_0^l U_r^2(x) dx] (\dot{p}_r(t) - \dot{q}_r(t)) + [k_1 \int_0^l U_r^2(x) dx] (p_r(t) - q_r(t)) \\ + [c_2 \int_0^l U_r^2(x) dx] \dot{p}_r(t) + [k_2 \int_0^l U_r^2(x) dx] p_r(t) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (16)$$

在式(15), (16)中令

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_2}{m_1} &= \mu_m, \quad \frac{k_2}{k_1} = \mu_k, \quad \frac{c_2}{c_1} = \mu_c; \\ \frac{k_1}{m_1} &= \omega_0^2, \quad \frac{c_1}{m_1} = 2\xi_0 \omega_0; \\ \frac{E_1 I_1 \int_0^l U_r^2(x) dx}{m_1 \int_0^l U_r^2(x) dx} &= \epsilon_r \omega_0^2; \\ P_r(t) &= \frac{P(t)}{m_1 \int_0^l U_r^2(x) dx}. \end{aligned} \right\} \quad (r = 1, 2, \dots) \quad (17)$$

由式(10)可知 $\int_0^l U_r^2(x) dx / \int_0^l U_s^2(x) dx = \beta_r^2$, 故有

$$\epsilon_r = \beta_r^2 \frac{E_1 I_1}{m_1 \omega_0^2} \quad (r = 1, 2, \dots) \quad (17)'$$

又令 $\omega_0 t = \tau$, 并将 $\frac{dq_r}{d\tau}$, $\frac{dp_r}{d\tau}$ 仍记为 $\dot{q}_r$, $\dot{p}_r$, 则式(15), (16) 成为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{p}_r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi_0 & -2\xi_0 \\ -2\xi_0 & 2(1 + \mu_c)\xi_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{p}_r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_r & 0 \\ 0 & \mu_k \epsilon_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_r \\ p_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_r(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 + \epsilon_r & -1 \\ -1 & 1 + \mu_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_r \\ p_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{P_r(\tau)}{\omega_0^2} U_r(\frac{v\tau}{\omega_0}) \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (r = 1, 2, \dots) \quad (18)$$

式(18)是一无量纲的方程组,便于数值计算.

式(18)的右端具体写出就是

$$\frac{P_r(\tau)}{\omega_0^2} U_r(\frac{v\tau}{\omega_0}) = (A_r \cos u_r \tau + B_r \sin u_r \tau + C_r \cosh u_r \tau + D_r \sinh u_r \tau) (P_0 + P_1 \sin \lambda \tau + P_2 \cos \lambda \tau). \quad (r = 3, 4, \dots) \quad (19)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{\beta_r v}{\omega_0}; \\ \lambda &= \frac{\omega}{\omega_0}; \\ A_r &= C_r = \frac{\cos \beta_r l - \operatorname{ch} \beta_r l}{m_1 \omega_0^2 \int_0^l U_r^2(x) dx}; \\ B_r &= D_r = \frac{\sin \beta_r l + \operatorname{sh} \beta_r l}{m_1 \omega_0^2 \int_0^l U_r^2(x) dx}. \end{aligned} \right\} \quad (r = 3, 4, \dots) \quad (20)$$

(当 $r = 1, 2$ 时,可类似写出,此处略)

为求式(18)的稳态解,可令

$$\left. \begin{aligned} q_r(\tau) &= \alpha_{r1} \cos u_r \tau + \alpha_{r2} \sin u_r \tau + \alpha_{r3} \cosh u_r \tau + \alpha_{r4} \sinh u_r \tau \\ &\quad + (f_{r1} \cos u_r \tau + f_{r2} \sin u_r \tau + f_{r3} \cosh u_r \tau + f_{r4} \sinh u_r \tau) \sin \lambda \tau \\ &\quad + (d_{r1} \cos u_r \tau + d_{r2} \sin u_r \tau + d_{r3} \cosh u_r \tau + d_{r4} \sinh u_r \tau) \cos \lambda \tau, \\ p_r(\tau) &= \sigma_{r1} \cos u_r \tau + \sigma_{r2} \sin u_r \tau + \sigma_{r3} \cosh u_r \tau + \sigma_{r4} \sinh u_r \tau \\ &\quad + (g_{r1} \cos u_r \tau + g_{r2} \sin u_r \tau + g_{r3} \cosh u_r \tau + g_{r4} \sinh u_r \tau) \sin \lambda \tau \\ &\quad + (e_{r1} \cos u_r \tau + e_{r2} \sin u_r \tau + e_{r3} \cosh u_r \tau + e_{r4} \sinh u_r \tau) \cos \lambda \tau. \end{aligned} \right\} \quad (r = 3, 4, \dots) \quad (21)$$

其中 $\alpha_{r1}, \sigma_{r1}, f_{r1}, g_{r1}, d_{r1}, e_{r1}$ 等是待定系数. 将式(21)代入式(18),比较两边的系数得三个方程组

$$\left. \begin{aligned} [A_1] \tilde{z}_1 &= \tilde{b}_1, \\ [A_2] \tilde{z}_2 &= \tilde{b}_2, \\ [A_3] \tilde{z}_3 &= \tilde{b}_3. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

其中 $[A_1], [A_2], [A_3]$ 是 8×8 阶方阵.

$$\left. \begin{aligned} \tilde{z}_1 &= (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, \alpha_{r3}, \alpha_{r4}, \sigma_{r1}, \sigma_{r2}, \sigma_{r3}, \sigma_{r4})^T, \\ \tilde{z}_2 &= (f_{r1}, f_{r2}, f_{r3}, f_{r4}, g_{r1}, g_{r2}, g_{r3}, g_{r4})^T, \\ \tilde{z}_3 &= (d_{r1}, d_{r2}, d_{r3}, d_{r4}, e_{r1}, e_{r2}, e_{r3}, e_{r4})^T. \end{aligned} \right\} \quad (r = 3, 4, \dots) \quad (23)$$

解方程组(22)即求出了稳态解.

4 轨道结构的垂向振动特性

4.1 轨道结构的固有圆频率

由式(11)解出 β_i , 由(9)可解出与之对应的固有圆频率. 对同一个振型 $U_i(x)$, 由式(9)可解出两个固有圆频率来, 这是由于振动系统是由两个连续梁组成的原故. 取如下轨道结构参

数⁽⁴⁾

$m_1 = 60.64\text{kg/m}, m_2 = 236\text{kg/m};$
 $k_1 = 89263 \times 10^3\text{N/m}^2, k_2 = 98100 \times 10^3\text{N/m}^2;$
 $E_1I_1 = 6624 \times 10^3\text{N} \cdot \text{m}^2, l = 25\text{m}.$

则有 $\omega_0 = 1213.2663\text{rad/s}; \mu_m = 3.8918, \mu_k = 1.099.$

则前 10 阶振型对应的 20 个固有圆频率如下:

$\beta_1 = 0$ 对应的固有圆频率就是钢轨和轨枕梁只作刚性运动(因此化为两个自由度)时的固有圆频率.

4.2 加速度曲线

轨道结构参数同 4.1,再取 $\xi_0 = 0.05, \lambda = 0.3, v = 50\text{m/s}, P_0 = P_1 = 150000\text{N}, P_2 = 0$, 则钢轨

表 1 前 10 阶振型对应的固有圆频率表

序号	β_i	ω_{ni}	序号	β_i	ω_{ni}
1	0	559.801	6	0.6912	566.221
		1397.336			1403.654
2	0.1892	559.838	7	0.8168	572.133
		1397.372			1409.686
3	0.3141	560.079	8	0.9425	581.141
		1397.605			1419.292
4	0.4398	560.868	9	1.0681	593.800
		1398.371			1433.709
5	0.5655	562.704	10	1.1938	610.366
		1400.164			1454.390

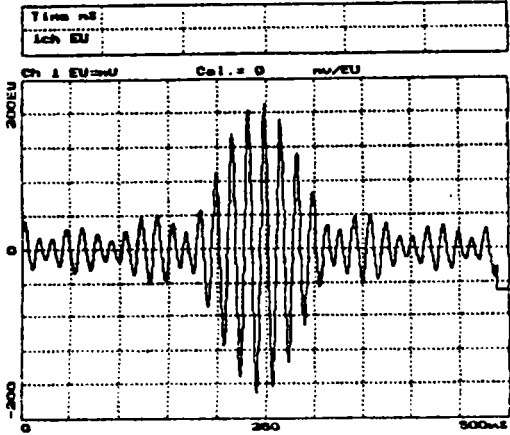


图 2 钢轨中点理论计算加速度曲线

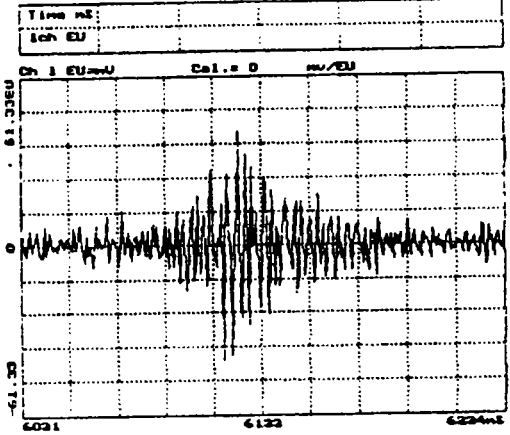


图 3 钢轨中点实测加速度曲线

中点的加速度曲线如图 2 所示. 图 3 是实测的加速度曲线. 比较图 2、图 3 可知,两者是很相似的. 另一方面,图 2 的频谱图如图 4 所示,从该图可知,图 2 的变幅加速度曲线的频率为 62.5Hz,它就是交变荷载的频率.

4.3 钢轨和轨枕梁中点的幅频响应曲线

令简谐荷载 $P(t) = P_1 \sin \omega t$, 该荷载从钢轨的左端以速度 v 运动到右端, 钢轨中点 ($x = \frac{l}{2}$) 的垂向位移的最大值比 P_1 静止作用于该点时该点的位移(记为 W_n), 定义为钢轨中点的动力放大系数 $\beta_{\text{钢枕}}$; 轨枕梁中点 ($x = \frac{l}{2}$) 的位移的最大值比 W_n 定义为轨枕梁中点的动力放大系数 $\beta_{\text{枕}}$. $\beta_{\text{钢枕}}$ 和 $\beta_{\text{枕}}$ 与 $\lambda = \frac{\omega}{\omega_0}$ 之间的关系曲线定义为各自的幅频响应曲线. 在 4.1 中的结构参数

下,再取 $v = 50\text{m/s}$, $\xi_0 = 0.05$, $\mu_c = 1.5$, 则得钢轨中点和轨枕梁中点的幅频响应曲线如图 5 所示。

由图 2 可看出,当 $\lambda_1 = 0.45$ 和 $\lambda_2 = 1.15$ 时,发生共振。这时对应的 ω 分别为

$$\omega_1 = \lambda_1 \omega_0 = 0.45 \times 1213.2663 = 545.970\text{rad/s},$$

$$\omega_2 = \lambda_2 \omega_0 = 1.15 \times 1213.2663 = 1395.256\text{rad/s},$$

与系统的固有频率很接近。因此,当移动的简谐力的频率与系统的固有频率接近时,将发生共振。这一点与普通的振动系统是一致的。为了降低共振峰,应增加阻尼。从这里还可看出,计算轨道结构的固有频率具有重要意义。

4.4 动力放大系数与速度之间的关系

在 4.1 中所给的轨道参数下,分别取 $\lambda = 0.3, 0.45, 0.6, 0.8, 1.2$, 我们计算了动力放大系数与速度之间的关系。从计算结果看,在某些 λ (如 $\lambda = 0.3, 0.6, 0.8$) 下,动力放大系数随速度的增加而增加。在某些 λ (如 $\lambda = 0.45, 1.2$) 下,动力放大系数随速度的增加反而减小。动力放大系数随速度变化而变化的快慢程度与 λ 有密切关系。 λ 越接近共振点,动力放大系数随速度改变而变得越厉害。为了减小动力放大系数对速度的敏感性,轮载的频率应低于轨道结构的最小固有频率。分析表明,轨道结构的动力响应并不总是随列车速度的增加而增加。

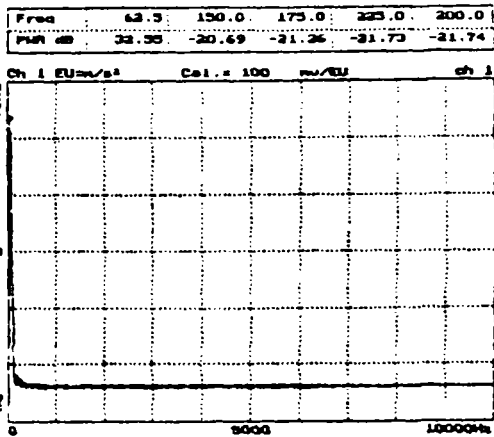


图 4 理论计算加速度曲线的功率谱

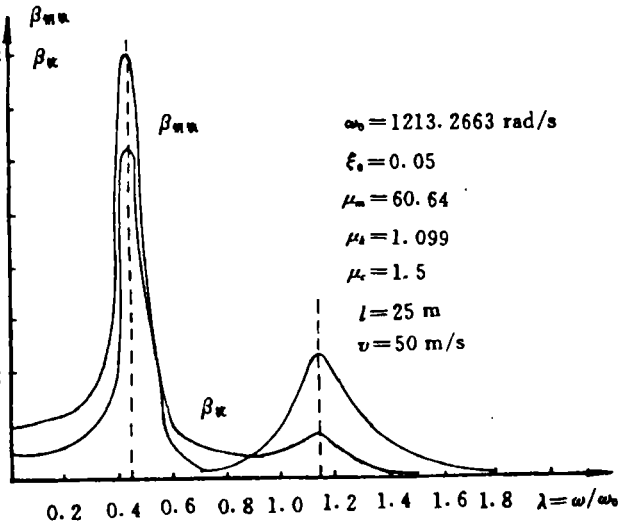


图 5 钢轨和轨枕梁中点的幅频响应曲线

参 考 文 献

- 1 Shirish P P. Vibrations of Railroad Tracks Subject to Oscillating and Moving Loads. ph D. Thesis, Delaware University, 1984
- 2 Fortin J P. Dynamic Track Deformation. French Railway Review, 1984, 2(1)
- 3 邢书珍. 铁道轨道的理论. 中国铁道科学, 1984, 2(1)
- 4 张宝珍, 李成辉. 列车速度对轨道竖向动力特性的影响. 西南交通大学学报, 1993, (1) 50
- 5 Mechanical Vibrations—Theory and Applications, FRANCIS S. TSE, Allyn and Bacon, Inc. 1978, 274~275

(下转第 50 页)

寿命.

(2) 单管工作时恒功效果不理想

尽管本逆变器单根灯管已能在 $40 \sim 65\text{V}$ 的电压范围内可靠工作,但恒功效果不够理想,灯管的照度随着输入电压的变化而变化,因此需对逆变器进一步的改进使它能在单管工作时比较理想.

参 考 文 献

- 1 叶治政,叶靖国. 开关稳压电源. 北京:高等教育出版社,1989.93 ~ 150
- 2 张鸿哲,王紫婷. 用 VMOS 管组成单灯逆变器. 铁道车辆,1992,30(11):28 ~ 31

A New Fluorescent Lamp Convert of Train

Xu Fei

(Center of Audio-
Visual Education)

Zheng Xiaofang

(Corporation of LANMONG
Science Industry)

He Guomin

(Department of
Electrical Engineering)

Abstract

The developing fundamentals of a new fluorescent lamp convert are introduced in this paper, and the testing results are given. The main advantages comparing with the fluorescent lamp convert of type BY-2 are also discussed..

Key words New; Train; Fluorescent; Convert

(上接第 44 页)

Vertical Vibration of Railway

Sheng Xiaozhen Lü Shaodi

(Department of Civil Engineering)

Abstract

The vertical vibration of railway under a moving and oscillating load is researched by using the model of two-layer beam and the method of modal decomposition.

Key words High speed Railway; railway structure; Vibration