第13卷第1期　　华东交通大学学报　　Vol.13 No.1
1996年3月　　Journal of East China Jiaotong University　　Mar. 1996

用WKB法的近似解作为精确解求微分方程

刘福之

（基础课部）

摘　要　用WKB近似方法解薛定谔方程，得到的解是近似的．本文提出一种用该近似解作为精确解求微分方程的方法，求得该微分方程可以分析解的近似条件及解的近似程度等问题．

关键词　WKB法；精确解；微分方程

分类号　O4

在量子力学中用薛定谔波动方程研究粒子状态的变化．在光波导的研究中，人们对波动方程采用不同的变换进行近似求解，方法之一是变换成薛定谔方程．薛定谔方程往往不能求出精确解，在许多情况下是求出其近似解．要分析该近似解适用条件及解的近似程度，则须求出用该近似解作为精确解的微分方程．

薛定谔方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}X^2}+[E-U(X)]Y=0, \tag{1}$$

令

$$P(X)=\frac{E-U(X)}{K^2}, \tag{2}$$

式(1)可写成

$$\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}X^2}+[K^2P(X)]Y=0. \tag{3}$$

设　式(3)的解为

$$Y=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}KS}, \tag{4}$$

式中s是X的函数，即$s=s(x)$，代入式(3)得s应满足的微分方程：

$$\mathrm{j}K^{-1}\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}X^2}-\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}X}\right)^2+P(X)=0. \tag{5}$$

设

$$s=s_0+\mu s_1+\mu^2s_2+\mu^3s_3+\cdots, \tag{6}$$

式中　$\mu=K^{-1}$，

代入式(5)得

$$(-\dot{s}_0^2+P(X))+\mu(\mathrm{j}\ddot{s}_0-2\dot{s}_0\dot{s}_1)+\mu^2(\mathrm{j}\ddot{s}_1-\dot{s}_1^2-2\dot{s}_0\dot{s}_2)+\cdots=0. \tag{7}$$

收稿日期：1995-07-08.　　刘福之，男，1943年生，副教授．

式中 $\dot{s}_0\dot{s}_1\dot{s}_2\cdots,\ddot{s}_0\ddot{s}_1\ddot{s}_2\cdots$分别表示各量的一阶或二阶导数．要使式(7)成立，必须是 μ 的各次方的系数等于零．

$$
\begin{aligned}
&-\dot{s}_0^2+P(X)=0,\\
&\mathrm{j}\ddot{s}_0-2\dot{s}_0\dot{s}_1=0,\\
&\mathrm{j}\ddot{s}_1-\dot{s}_1^2-2\dot{s}_0\dot{s}_2=0,\\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{8}
$$

由上式可解出

$$
\begin{aligned}
s_0&=\pm\int\sqrt{P(X)}\mathrm{d}X+C_1,\\
s_1&=\frac{1}{2}\mathrm{j}\ln\sqrt{P(X)}+C_2,\\
s_2&=\int\left(\frac{5}{32}\frac{(\dot{P}(X))^2}{(P(X))^{\frac{5}{2}}}+\frac{1}{8}\frac{\ddot{P}(X)}{(P(X))^{\frac{3}{2}}}\right)\mathrm{d}X+C_3,\\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{9}
$$

考虑到式(6)，将上式中各 s_i 值代入式(4)，即得式(1)的解．但由于 s_2 以上的表示式比较复杂，一般 s 只取两项 s_0s_1．因为 s 只取有限项，所以式(4)是式(1)的近似解．下边求当 s 取有限项时，式(4)作为精确解的微分方程．

s 取一项 s_0，由式(4)得

$$Y=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}Ks_0},\tag{10}$$

代入式(3)得

$$\mathrm{j}^2K^2\dot{s}_0^2+\mathrm{j}K\ddot{s}_0+K^2P(X)=0.$$

利用式(8)关系，上式可写成

$$\mathrm{j}K\ddot{s}_0=0,$$

或

$$\mathrm{j}\,\frac{1}{2}(P(X))^{-\frac{1}{2}}\dot{P}(X)=0.$$

显然在方程式(3)中加入一项

$$-\left[\mathrm{j}\,\frac{1}{2}(P(X))^{-\frac{1}{2}}\dot{P}(X)\right]Y$$

得

$$\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}X^2}+\left[K^2P(X)-\frac{1}{2}\mathrm{j}(P(X))^{-\frac{1}{2}}\dot{P}(X)\right]Y=0.\tag{11}$$

可以验证式(10)是式(1)的近似解，是式(11)的精确解．

s 取两项 s_0,s_1，由式(6)和式(4)得

$$Y=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}Ks_0+\mu s_1},\tag{12}$$

代入式(3)得

$$\mathrm{j}^2K^2\dot{s}_0^2+\mathrm{j}^2\mu^2K^2\dot{s}_1^2+\mathrm{j}^2K^2\mu2\dot{s}_0\dot{s}_1+\mathrm{j}K\ddot{S}_0+\mathrm{j}K\mu\ddot{s}_1+K^2P(X)=0.$$

利用式(8)上式可简化为

$$\mathrm{j}\ddot{s}_1-\dot{s}_1^2=0,\quad 即:\frac{5}{16}\left(\frac{\dot{P}(X)}{P(X)}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{\ddot{P}(X)}{P(X)}\right)=0.$$

在方程(3)中加入一项

$$-[\frac{5}{16}(\frac{\dot{P}(X)}{P(X)})^2-\frac{1}{4}(\frac{\ddot{P}(X)}{P(X)})]Y$$

得

$$\frac{d^2Y}{dX^2}+[K^2P(X)-\frac{5}{16}(\frac{\dot{P}(X)}{P(X)})^2+\frac{1}{4}(\frac{\ddot{P}(X)}{P(X)})]Y=0. \quad (13)$$

显然式(12)是式(1)的近似解,是式(13)的精确解.

可以证明:s 取三项 $s_0s_1s_2$,则式(3)中加入一项 $-(jK^{-1}\ddot{s}_2-2K^{-1}\dot{s}_1\dot{s}_2)Y$

即

$$-[-\frac{9}{32}j(\dot{P}(X))^3(\dot{P}(X))^{-\frac{7}{2}}+\frac{5}{32}j\dot{P}(X)\ddot{P}(X)(P(X))^{-\frac{5}{2}}$$

$$-\frac{j}{16}\dddot{P}(X)(P(X))^{-\frac{3}{2}}-\frac{3}{16}j(P(X))^3(P(X))^{-\frac{1}{2}}+\frac{3}{16}j(P(X))^{\frac{1}{2}}\ddot{P}(X)\dot{P}(X)]Y$$

式(4)为新方程的精确解.

参考文献

1 周世勋. 量子力学. 上海:上海科学技术出版社,1964

2 Oyamada K, Okeshi T. High-accuraey WKB analysis of a-power graded-core fibers. IEEE Trans. on M. T. T., MTT-28,8, 1980, 839~845

Using the Approximate Solution of WKB Method as an Accurate One to Solve a Differential Equation

Liu Fuzhi

(Department of Basic Courses)

Abstract The solution is an approximate one when WKB method is used to solve the Sehrödinger Equation. This paper introduces a method of using the approximate solution as an accurate one to solve a differential equation. Based on the differential equation solved, it is possible to analyse such problems as the approximate terms and degrees of the solution.

Key words WKB method; Accurate solution; Differential equation