第13卷第2期　　Journal of East China Jiaotong University　　Vol. 13 No. 2
1996年6月　　Jun. 1996

中心对称矩阵及其性质*

圣小珍　　徐玉华

(土木工程系)　　(南昌水专)

摘　要　定义了许多工程实际问题都将导出的中心对称矩阵，并讨论了这种矩阵的某些性质.

关键词　矩阵；特征问题

分类号　O316

1　中心对称矩阵的定义

定义　N 阶对称矩阵$[A]=(a_{ij})_{N\times N}$为中心对称的，如果存在整数$I\geqslant 0, J\geqslant 0, L\geqslant 0$，使得

$$2I+J+L=N \tag{1}$$

且有

$$\left.\begin{aligned}
&a_{ll'}=a_{N-l+1,N-l'+1},\\
&a_{l,N-l'+1}=a_{N-l+1,l'},\\
&a_{lm}=-a_{N-l+1,m},\\
&a_{ln}=a_{N-l+1,n},\\
&a_{mn}=0,\\
&a_{mm'},a_{nn'}\text{任意}.
\end{aligned}\right\}
\quad
\begin{aligned}
&(l,l'=1,2,\cdots,I;\\
&m,m'=I+1,I+2,\cdots,I+J;\\
&n,n'=I+J+1,\cdots,I+J+L)
\end{aligned}
\tag{2}$$

例如矩阵

$$[A]=\left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\
2 & 9 & 11 & 12 & 18 & 19 & 10 & 7\\
\hline
3 & 11 & 13 & 15 & 0 & 0 & -11 & -3\\
4 & 12 & 15 & 14 & 0 & 0 & -12 & -4\\
\hline
5 & 18 & 0 & 0 & 16 & 20 & 18 & 5\\
6 & 19 & 0 & 0 & 20 & 17 & 19 & 6\\
\hline
7 & 10 & -11 & -12 & 18 & 19 & 9 & 2\\
8 & 7 & -3 & -4 & 5 & 6 & 2 & 1
\end{array}\right) \tag{3}$$

收稿日期：1995-06-21.　　圣小珍，男，1962年生，副教授.

* 校立课题："高速列车轨道结构的可行性分析"之有关数学理论部分.

为中心对称矩阵，且 $I=2, J=2, L=2$. 又显然单位矩阵 $[E]$ 也为中心对称矩阵. 当 $J=L=0$ 时，中心对称矩阵中各元素关于矩阵的中心是对称的，故名.

在实际工作中我们经常碰到中心对称矩阵，例如车辆系统的质量矩阵 $[M]$ 和阻尼矩阵 $[C]$[1]，等步长插值（在研究轮轨接触时要应用插值理论）[2] 所导出的矩阵都是中心对称的. 因此，研究这种矩阵的性质以简化运算是有意义的.

现设 $[K]=(k_{ij})_{N\times N}$，$[M]=(m_{ij})_{N\times N}$，是中心对称矩阵，即存在整数 $0\leqslant I, J, L\leqslant N$，使式（1）和式（2）成立. 定义四个低阶矩阵

$$\left.\begin{aligned} &[K^+]=(k_{ij}^+)_{(I+L)\times(I+L)}, \quad [K^-]=(k_{ij}^-)_{(I+J)\times(I+J)},\\ &[M^+]=(m_{ij}^+)_{(I+L)\times(I+L)}, \quad [M^-]=(m_{ij}^-)_{(I+J)\times(I+J)}.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中，（以 $[K^+]$，$[K^-]$ 的元素为例）

$$\begin{cases} k_{ll'}^+=k_{l'l}^+=k_{ll'}+k_{l,N-l'+1},\\ k_{ls}^+=k_{sl}^+=k_{l,J+s},\\ k_{ss'}^+=k_{s's}^+=\dfrac{1}{2}k_{J+s,J+s'}.\end{cases} \qquad \begin{cases} k_{ll'}^-=k_{l'l}^-=k_{ll'}-k_{l,N-l'+1},\\ k_{lm}^-=k_{ml}^-=k_{lm},\\ k_{mm'}^-=k_{m'm}^-=\dfrac{1}{2}k_{mm'}.\end{cases} \tag{5}$$

$(l, l'=1, 2, \cdots, I; s, s'=I+1, I+2, \cdots, I+L; m, m'=I+1, I+2, \cdots, I+J.)$

例如，对于如式（3）所定义的矩阵 $[A]$，我们有

$$[A^+]=\begin{pmatrix} 9 & 9 & 5 & 6\\ 9 & 19 & 18 & 19\\ 5 & 18 & 8 & 10\\ 6 & 19 & 10 & 17/2\end{pmatrix}, \qquad [A^-]=\begin{pmatrix} -7 & -5 & 3 & 4\\ -5 & -1 & 11 & 12\\ 3 & 11 & 13/2 & 15/2\\ 4 & 12 & 15/2 & 7\end{pmatrix}.$$

2　中心对称矩阵的性质

性质 1　设 λ^+ 及 $z=(z_1, z_2, \cdots, z_{I+L})^T$ 分别是

$$([K^+]-\lambda^+[\text{牵}^+])z=0 \tag{6}$$

的特征值及相应的特征向量，λ^- 及 $w=(w_1, w_2, \cdots, w_{I+J})^T$ 分别是

$$([K^-]-\lambda^-[M^-])w=0 \tag{7}$$

的特征值及相应的特征向量. 那么 λ^+，λ^- 也是

$$([K]-\lambda[M])x=0 \qquad x\in R^N \tag{8}$$

的特征值，与之对应的特征向量分别是

$$x^+=(x_1^+, x_2^+, \cdots, x_N^+)^T=(z_1, z_2, \cdots, z_I, \underbrace{0, \cdots, 0}_{J\text{个}}, z_{I+1}, \cdots, z_{I+L}, z_I, z_{I-1}, \cdots, z_1)^T \tag{9}$$

和

$$x^-=(x_1^-, x_2^-, \cdots, x_N^-)^T=(w_1, w_2, \cdots, w_{I+J}, \underbrace{0, \cdots, 0}_{L\text{个}}, -w_I, -w_{I-1}, \cdots, -w_1)^T. \tag{10}$$

证明　我们只要证明

$$([K]-\lambda^+[M])x^+=0. \tag{8a}$$

至于 $([K]-\lambda^-[M])x^-=0$ 可类似证明.

由于 λ^+ 及 $(z_1, \cdots, z_{I+L})^T$ 是式（6）的特征值及特征向量，故有

$$\sum_{j=1}^{I} k_{ij}^{+} z_j + \sum_{j=I+1}^{I+L} k_{ij}^{+} z_j = \lambda^{+} \Big(\sum_{j=1}^{I} m_{ij}^{+} z_j + \sum_{j=I+1}^{I+L} m_{ij}^{+} z_j \Big). \qquad (i = 1, 2, \cdots, I+L) \qquad (11)$$

注意到 k_{ij}^{+}, m_{ij}^{+} 的定义，由式(11) 可得

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{I} (k_{ij} + k_{i,N-j+1}) z_j + \sum_{j=I+1}^{I+L} k_{i,J+j} z_j \\ &\quad = \lambda^{+} \Big(\sum_{j=1}^{I} (m_{ij} + m_{i,N-j+1}) z_j + \sum_{j=I+1}^{I+L} m_{i,J+j} z_j \Big) \qquad (1 \leqslant i \leqslant I) \end{aligned} \qquad (12)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{I} k_{J+i,j} z_j + \sum_{j=I+1}^{I+L} \frac{1}{2} k_{J+i,J+j} z_j \\ &\quad = \lambda^{+} \Big(\sum_{j=1}^{I} m_{J+i,j} z_j + \sum_{j=I+1}^{I+L} \frac{1}{2} m_{J+i,J+j} \Big) z_j \qquad (I+1 \leqslant i \leqslant I+L) \end{aligned} \qquad (13)$$

另一方面，

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} k_{ij} x_j^{+} &= \Big(\sum_{j=1}^{I} + \sum_{j=I+1}^{I+L} + \sum_{j=I+J+1}^{I+J+L} + \sum_{j=I+J+L+1}^{N} \Big) k_{ij} x_j^{+} = \sum_{j=1}^{I} k_{ij} z_j + \sum_{j=I+1}^{I+L} k_{i,J+j} z_j \\ &\quad + \sum_{j=1}^{I} k_{i,N-j+1} z_j = \sum_{j=1}^{I} (k_{ij} + k_{i,N-j+1}) z_j + \sum_{j=I+1}^{I+L} k_{i,J+j} z_j. \qquad (i = 1, 2, \cdots, N) \end{aligned} \qquad (14)$$

同理有

$$\lambda^{+} \sum_{j=1}^{N} m_{ij} x_j^{+} = \lambda^{+} \Big[\sum_{j=1}^{I} (m_{ij} + m_{i,N-j+1}) z_j + \sum_{j=I+1}^{I+L} m_{i,J+j} z_j \Big]. \qquad (15)$$

要证明式(8a)，只要证明对所有 $i = 1, 2, \cdots, N$，有

$$\sum_{j=1}^{N} k_{ij} x_j^{+} = \lambda^{+} \sum_{j=1}^{N} m_{ij} x_j^{+}. \qquad (16)$$

为此，(1) 当 $1 \leqslant i \leqslant I$ 时，由式(12)、(14)、(15) 知式(16) 成立.

(2) 当 $I+1 \leqslant i \leqslant I+J$ 时：由于 $1 \leqslant j \leqslant I$ 时，$k_{ij} = -k_{i,N-j+1}$，$m_{ij} = -m_{i,N-j+1}$；$I+1 \leqslant j \leqslant I+L$ 时，$k_{i,J+j} = m_{i,J+j} = 0$，故由式(14)、(15) 知式(16) 成立.

(3) 当 $I+J+1 \leqslant i \leqslant I+J+L$ 时：由于 $1 \leqslant j \leqslant I$ 时，$k_{ij} = k_{i,N-j+1}$，$m_{ij} = m_{i,N-j+1}$，由式(14) 得

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} k_{ij} x_j^{+} &= 2 \sum_{j=1}^{I} k_{ij} z_j + \sum_{j=I+1}^{I+L} k_{i,J+j} z_j = 2 \sum_{j=1}^{I} k_{J+i',j} z_j + \sum_{j=I+1}^{I+L} k_{J+i',J+j} z_j. \\ &(i' = i - J, I+1 \leqslant i' \leqslant I+L) \end{aligned} \qquad (17)$$

同理有

$$\lambda^{+} \sum_{j=1}^{N} m_{ij} x_j^{+} = \lambda^{+} \Big(2 \sum_{j=1}^{I} m_{J+i',j} z_j + \sum_{j=I+1}^{I+L} m_{J+i',J+j} z_j \Big). \quad (I+1 \leqslant i' \leqslant I+L) \qquad (18)$$

故由式(13) 知式(16) 成立.

(4) 当 $I+J+L+1 \leqslant i \leqslant N$ 时，令 $i = N - i' + 1, 1 \leqslant i' \leqslant I$，由式(14) 得

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} k_{ij} x_j^{+} &= \sum_{j=1}^{I} (k_{N-i'+1,j} + k_{N-i'+1,N-j+1}) z_j + \sum_{j=I+1}^{I+L} k_{N-i'+1,J+j} z_j \\ &\overset{(2)}{=} \sum_{j=1}^{I} (k_{i',N-j+1} + k_{i'j}) z_j + \sum_{j=I+1}^{I+L} k_{i',J+j} z_j. \end{aligned} \qquad (19)$$

同理，由式(15) 得

$$\lambda^+ \sum_{j=1}^{N} m_{ij} x_j^+ = \lambda^+ \Big[\sum_{j=1}^{I} (m_{i,N-j+1} + m_{ij}) z_j + \sum_{j=I+1}^{I+L} m_{i,J+j} z_j\Big]. \tag{20}$$

由式(12)知式(16)成立．证毕．

注：从式(6)可解出 $I+L$ 个独立的特征向量 $z_i(i=1,2,\cdots,I+L)$，于是通过式(9)可得到式(8)的 $I+L$ 个独立的特征向量 x_i^+．从式(7)可解出 $I+J$ 个独立的特征向量 $w_j(j=1,2,\cdots,I+J)$，于是通过式(10)可得到式(8)的 $I+J$ 个独立的特征向量 x_j^-．又直接验证 $(x_i^+)^T(x_j^-)^T=0$，故 x_i^+ 和 x_j^- 也是不相关的．这样，通过式(6)、(7)，我们可决定式(8)的全部特征值和特征向量．

性质 2　设 $[M]=(m_{ij})_{N\times N}$ 是中心对称矩阵，即存在整数 $0\leqslant I,J,L\leqslant N$ 满足式(1)、(2)．则 $\det[M]=2^{J+L}\cdot\det[M^+]\cdot\det[M^-]$，其中 $[M^+]$，$[M^-]$ 由式(4)、(5)所定义．

证　考虑特征问题

$$\det([M]-\lambda[E])=0. \tag{21}$$

设其根是 $\lambda_k(k=1,2,\cdots,N)$，则有

$$\prod_{k=1}^{N}\lambda_k=(-1)^N\cdot\det[M]. \tag{22}$$

现令 $[K]=[E]$，则由性质 1 知式(21)等价于

$$\left.\begin{aligned}\det([M^+]-\lambda^+[K^+])&=0,\\ \det([M^-]-\lambda^-[K^-])&=0.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

其中

$$[K^+]=\begin{pmatrix}[E]_{I\times I} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}[E]_{L\times L}\end{pmatrix},\quad [K^-]=\begin{pmatrix}[E]_{I\times I} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}[E]_{J\times J}\end{pmatrix}.$$

式(23)等价于

$$\left.\begin{aligned}\det([K^+]^{-1/2}[M^+][K^+]^{-1/2}-\lambda^+[E])&=0,\\ \det([K^-]^{-1/2}[M^-][K^-]^{-1/2}-\lambda^-[E])&=0.\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

其中

$$[K^+]^{-1/2}=\begin{pmatrix}[E]_{I\times I} & 0\\ 0 & \sqrt{2}[E]_{L\times L}\end{pmatrix},\quad [K^-]^{-1/2}=\begin{pmatrix}[E]_{I\times I} & 0\\ 0 & \sqrt{2}[E]_{J\times J}\end{pmatrix}.$$

于是

$$\prod_{i=1}^{I+L}\lambda_i^+=(-1)^{I+L}\det([K^+]^{-\frac{1}{2}}[M^+][K^+]^{-\frac{1}{2}})=(-1)^{I+L}2^L\det[M^+];$$

$$\prod_{j=1}^{I+J}\lambda_j^-=(-1)^{I+J}\det([K^-]^{-\frac{1}{2}}[M^-][K^-]^{-\frac{1}{2}})=(-1)^{I+J}2^J\det[M^-].$$

由性质 1 可知

$$\prod_{k=1}^{N}\lambda_k=\prod_{i=1}^{I+L}\lambda_i^+\cdot\prod_{j=1}^{I+J}\lambda_j^-,$$

即
$$\begin{aligned}(-1)^N\det[M]&=(-1)^{I+L}2^L\det[M^+](-1)^{I+J}2^J\det[M^-]\\&=(-1)^{2I+J+L}2^{L+J}\det[M^+]\det[M^-];\end{aligned}$$

即(注意到 $N=2I+J+L$)　$\det[M]=2^{J+L}\det[M^+]\det[M^-]$．证毕．

性质 3　令 $[A]=(a_{ij})_{N\times N}$ 是中心对称的，即存在 $I,J,L\geqslant 0$，使式(1)、(2)成立．考虑方

程组

$$[A]x = b, \tag{25}$$

其中 $x \in R^N, b = (b_1, b_2, \cdots, b_N)^T \in R^N$. 定义

$$b^+ = \left(\frac{b_1 + b_N}{2}, \frac{b_2 + b_{N-1}}{2}, \cdots, \frac{b_I + b_{N-I+1}}{2}, \frac{b_{I+J+1}}{2}, \frac{b_{I+J+2}}{2}, \cdots, \frac{b_{I+J+L}}{2}\right)^T \in R^{I+L}, \tag{26}$$

$$b^- = \left(\frac{b_1 - b_N}{2}, \frac{b_2 - b_{N-1}}{2}, \cdots, \frac{b_I - b_{N-I+1}}{2}, \frac{b_{I+1}}{2}, \frac{b_{I+2}}{2}, \cdots, \frac{b_{I+J}}{2}\right)^T \in R^{I+J}. \tag{27}$$

又设 $z = (z_1, z_2, \cdots, z_{I+L})^T \in R^{I+L}$ 是方程组

$$[A^+]z = b^+ \tag{28}$$

的解, $W = (w_1, w_2, \cdots, w_{I+J})^T$ 是方程组

$$[A^-]w = b^- \tag{29}$$

的解, 其中 $[A^+]$, $[A^-]$ 如式(4)、(5) 所定义, 则式(25) 的解为

$$x = (z_1, z_2, \cdots, z_I, \underbrace{0, \cdots, 0}_{J\text{个}}, z_{I+1}, z_{I+2}, \cdots, z_{I+L}, z_I, z_{I-1}, \cdots, z_1)^T$$

$$+ (w_1, w_2, \cdots, w_I, w_{I+1}, w_{I+2}, \cdots, w_{I+J}, \underbrace{0, \cdots, 0}_{L\text{个}}, -w_I, -w_{I-1}, \cdots, -w_1)^T. \tag{30}$$

证明 将式(30) 代入式(25) 即可证明. 此处略.

性质 4 设 $[A]$ 是中心对称矩阵, 即存在 $I, J, L \geqslant 0$, 使式(1)、(2) 成立. 现令 $[A^+]^{-1} = (\delta^+_{ij})_{(I+L)\times(I+L)}$, $[A^-]^{-1} = (\delta^-_{ij})_{(I+J)\times(I+J)}$, 则由下式所确定的中心对称矩阵 $[\delta] = (\delta_{ij})_{N\times N}$ 即为 $[A]$ 的逆矩阵:

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{ll'} = \delta_{N-l+1,N-l'+1} = (\delta^+_{ll'} + \delta^-_{ll'})/2, \\ &\delta_{l,N-l'+1} = \delta_{N-l+1,l'} = (\delta^+_{ll'} - \delta^-_{ll'})/2, \\ &\delta_{lm} = -\delta_{N-l+1,m} = \delta^-_{lm}/2, \\ &\delta_{ln} = \delta_{N-l+1,n} = \delta^+_{l,n-J}/2, \\ &\delta_{mm'} = \delta^-_{mm'}/2,\ \delta_{nn'} = \delta^+_{n-J,n'-J}/2, \\ &\delta_{mn} = 0. \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &(l, l' = 1, 2, \cdots, I; \\ &m, m' = I+1, I+2, \cdots, I+J; \\ &n, n' = I+J+1, I+J+2, \cdots, \\ &\qquad I+J+L) \end{aligned} \tag{31}$$

证明 考虑方程组

$$[A]x = b. \tag{32}$$

其中 $x \in R^N, b = (b_1, b_2, \cdots, b_N)^T$ 是任意自由项, 由性质 3 知, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)^T$ 可由式(28)、(29)、(30) 得到, 即有

(1) 当 $i = 1, 2, \cdots, I$ 时,

$$\begin{aligned} x_i = z_i + w_i &= \sum_{j=1}^{I} \delta^+_{ij}(b_j + b_{N-j+1})/2 + \sum_{j=I+1}^{I+L} \delta^+_{ij} \frac{b_{J+j}}{2} + \sum_{j=1}^{I} \delta^-_{ij}(b_j - b_{N-j+1})/2 \\ &+ \sum_{j=I+1}^{I+J} \delta^-_{ij} \cdot b_j/2 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{I}(\delta^+_{ij} + \delta^-_{ij})b_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{I}(\delta^+_{ij} - \delta^-_{ij})b_{N-j+1} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{j=I+1}^{I+J} \delta^-_{ij} b_j + \frac{1}{2}\sum_{j=I+1}^{I+L} \delta^+_{ij} b_{J+j}. \end{aligned} \tag{33}$$

(2) 当 $i = I+1, I+2, \cdots, I+J$ 时,

$$x_i = w_i = \sum_{j=1}^{I} \delta^-_{ij} \frac{b_j - b_{N-j+1}}{2} + \sum_{j=I+1}^{I+J} \delta^-_{ij} \frac{b_j}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{I} \delta^-_{ij}(b_j - b_{N-j+1}) + \frac{1}{2}\sum_{j=I+1}^{I+J} \delta^-_{ij} b_j. \tag{34}$$

(3) 当 $i = I + J + 1, \cdots, I + J + L$ 时,

$$x_i = z_{i-J} = \sum_{j=1}^{I} \delta^+_{i-J,j}(b_j + b_{N-j+1})/2 + \sum_{j=I+1}^{I+L} \delta^+_{i-J,j} b_{J+j}/2. \tag{35}$$

(4) 当 $i = I + J + L + 1, \cdots, N$ 时,

$$x_i = z_{N-i+1} - w_{N-i+1} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{I}(\delta^+_{N-i+1,j} - \delta^-_{N-i+1,j}) b_j$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{I}(\delta^+_{N-i+1,j} + \delta^-_{N-i+1,j}) b_{N-j+1} + \frac{1}{2}\sum_{j=I+1}^{I+L} \delta^+_{N-i+1,j} b_{J+j} - \frac{1}{2}\sum_{j=I+1}^{I+J} \delta^-_{N-i+1,j} b_j. \tag{36}$$

现在证明,由 $y = [\delta] b$ 算出的 y 等于 x. 由于 b 是任意的,故 $[\delta]$ 即为 $[A]^{-1}$. y 展开为

$$y_i = \left(\sum_{j=1}^{I} + \sum_{j=I+1}^{I+J} + \sum_{j=I+J+1}^{I+J+L} + \sum_{j=I+J+L+1}^{N}\right) \delta_{ij} b_j. \qquad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{37}$$

下面分别证明:

(1) 当 $1 \leqslant i \leqslant I$ 时,由式(31)、(37)得

$$y_i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{I}(\delta^+_{ij} + \delta^-_{ij}) b_j + \frac{1}{2}\sum_{j=I+1}^{I+J} \delta^-_{ij} b_j + \frac{1}{2}\sum_{j=I+J+1}^{I+J+L} \delta^+_{i,j-J} b_j + \sum_{j=1}^{I} \delta_{i,N-j+1} b_{N-j+1}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{I}(\delta^+_{ij} + \delta^-_{ij}) b_j + \frac{1}{2}\sum_{j=I+1}^{I+J} \delta^-_{ij} b_j + \frac{1}{2}\sum_{j=I+1}^{I+L} \delta^+_{ij} b_{J+j} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{I}(\delta^+_{ij} - \delta^-_{ij}) b_{N-j+1},$$

于是由式(33)知 $y_i = x_i$.

(2) 当 $I + 1 \leqslant i \leqslant I + J$ 时,由式(37)、(31)得

$$y_i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{I} \delta^-_{ij} b_j + \frac{1}{2}\sum_{j=I+1}^{I+J} \delta^-_{ij} b_j + \sum_{j=1}^{I} \delta_{i,N-j+1} b_{N-j+1} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{I} \delta^-_{ij} b_j + \frac{1}{2}\sum_{j=I+1}^{I+J} \delta^-_{ij} b_j -$$

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{I} \delta^-_{ij} b_{N-j+1} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{I} \delta^-_{ij}(b_j - b_{N-j+1}) + \frac{1}{2}\sum_{j=I+1}^{I+J} \delta^-_{ij} b_j,$$

于是由式(34)知 $y_i = x_i$.

(3) 当 $I + J + 1 \leqslant i \leqslant I + J + L$ 时,由式(37)、(31)得

$$y_i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{I} \delta^+_{i-J,j} b_j + \frac{1}{2}\sum_{j=I+J+1}^{I+J+L} \delta^+_{i-J,j-J} b_j + \sum_{j=1}^{I} \delta_{i,N-j+1} b_{N-j+1} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{I} \delta^+_{i-J,j} b_j$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{j=I+1}^{I+L} \delta^+_{i-J,j} b_{J+j} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{I} \delta^+_{i-J,j} b_{N-j+1} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{I} \delta^+_{i-J,j}(b_j + b_{N-j+1}) + \frac{1}{2}\sum_{j=I+1}^{I+L} \delta^+_{i-J,j} b_{J+j}.$$

于是由式(35)知 $y_i = x_i$.

(4) 当 $I + J + L + 1 \leqslant i \leqslant N$ 时,由式(37)、(31)得

$$y_i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{I}(\delta^+_{N-i+1,j} - \delta^-_{N-i+1,j}) b_j - \frac{1}{2}\sum_{j=I+1}^{I+J} \delta^-_{N-i+1,j} b_j + \frac{1}{2}\sum_{j=I+J+1}^{I+J+L} \delta^+_{N-i+1,j-J} b_j$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{I}(\delta^+_{N-i+1,j} + \delta^-_{N-i+1,j}) b_{N-j+1} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{I}(\delta^+_{N-i+1,j} - \delta^-_{N-i+1,j}) b_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{I}(\delta^+_{N-i+1,j} +$$

$$\delta^-_{N-i+1,j}) b_{N-j+1} + \frac{1}{2}\sum_{j=I+1}^{I+L} \delta^+_{N-i+1,j} b_{J+j} - \frac{1}{2}\sum_{j=I+1}^{I+J} \delta^-_{N-i+1,j} b_j.$$

于是由式(36)知 $y_i = x_i$. 证毕.

3　结束语

中心对称矩阵广泛存在于工程实际问题中. 凡物理上具有某种对称的系统,相应的矩阵

便是中心对称的[3]．本文讨论了中心对称矩阵的四个性质，利用这四个性质可使求特征值、行列式、解方程组以及求逆矩阵大为简化．中心对称矩阵必然还有其它重要性质，这需要进一步研究．

参 考 文 献

1　王福天．车辆动力学．北京：中国铁道出版社，1983．74～100

2　李岳生，黄友谦．数值逼近．北京：人民教育出版社，1981．104～114

3　王光远．应用分析动力学．北京：人民教育出版社，1981．123～138

Matrix with Central Symmetry and its Properties

Sheng Xiaozhen

(Department of Civil Engineering)

Xu Yuhua

(Nanchang Hydraulic and Water Power Engineering College)

Abstract　In this paper, the matrix with central symmetry is defined. This kind of matrix can be deduced from many fields, and its properties are also discussed.

Key words　Matrix; Eigenvalue problem

(上接第29页)

Implementation of a Text-style CAI System

Ding Zhenfan

(Center of Computer)

Abstract　This paper presents a implementation of text-style CAI instruction software designed by means of MFOXBASE+ in NOVELL network. This system is devided into two parts, the teacher's operation part by which teacher can arrange the instruction content according to the current teaching demands, and the student's operation part by which student can learn the knowledge according to his selecton of chapter and section, and do exercises or participate in test.

Key words　Computer aided instruction (CAI); Examination questions base; Data base