

高阶非线性非完整力学系统 的积分方法

张 毅

(苏州城建环保学院)

摘 要 本文给出了积分高阶非线性非完整力学系统运动方程的场方法, 并举例说明结果的应用.

关键词 运动方程; 高阶非完整系统; 积分方法; 场方法

分类号 O316

0 引 言

由于力学本身以及自动调整、自动控制理论的发展, 人们越来越重视二阶和更高阶非完整约束系统力学的研究, 并已取得了许多重要成果^[1~6]. 然而, 这些研究大多数还只限于动力学方程的建立, 而对其积分方法的研究则较少.

本文研究高阶非线性非完整力学系统的积分方法. 首先将广义坐标及其 m 阶导数同时取作为场变量, 然后应用场方法^[7,8] 积分高阶非线性非完整系统的动力学方程. 文末举例说明结果的应用.

1 动力学微分方程及其标准形式

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 来确定. 系统的运动受有 g 个理想 m 阶非线性非完整约束

$$f_{\beta}(q_s, \dot{q}_s, \ddot{q}_s, \dots, q_s^{(m)}, t) = 0, \quad (\beta = 1, \dots, g; s = 1, \dots, n; m = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

系统的运动微分方程可表为 Routh 形式^[1]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s + \sum_{\beta=1}^g \lambda_{\beta} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial q_s^{(m)}}. \quad (s = 1, \dots, n; m = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

其中, T 为系统动能; Q_s 为广义力; λ_{β} 为不定乘子. 方程(2)可表为显形式

$$\sum_{k=1}^n A_{ks} \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n [k, j; s] \dot{q}_k \dot{q}_j - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial B_k}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial B_s}{\partial \dot{q}_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial B_s}{\partial t}$$

$$-\frac{\mathcal{Q}_0}{\mathcal{Q}_s} + \sum_{k=1}^n \frac{\mathcal{A}_{ks}}{\mathcal{Q}} q_k = Q_s + \sum_{\beta=1}^g \lambda_{\beta} \frac{\mathcal{J}^{\beta}}{\partial \mathcal{Q}_s^{(m)}}. \quad (s = 1, 2, \dots, n; m = 1, 2, \dots) \quad (3)$$

其中, $\mathcal{A}_{ks}$ 为动能 T 的二次型系数; B_s 为一次型系数; T_0 为动能中不依赖于广义速度的部分, 而

$$[k, j; s] = \frac{1}{2} \left[\frac{\mathcal{A}_{ks}}{\mathcal{Q}_j} + \frac{\mathcal{A}_{js}}{\mathcal{Q}_k} - \frac{\mathcal{A}_{kj}}{\mathcal{Q}_s} \right] \quad \text{为矩阵} [\mathcal{A}_{ks}] \text{的第一类 Christoffel 记号.}$$

不失一般性, 设从式 (3) 的后面 g 个方程可以解出约束乘子

$$\lambda_{\beta} = \lambda_{\beta}(q_s, q_s, \dots, q_s, t) \quad (\beta = 1, \dots, g; s = 1, \dots, n) \quad (4)$$

将式 (4) 代入式 (3) 的前面 $n - g$ 个方程, 并将所得方程记作

$$G_{\sigma}(q_s, q_s, \dots, q_s, t) = 0, \quad (\sigma = 1, \dots, \xi; \xi = n - g) \quad (5)$$

将式 (5) 对时间 t 求导数, 我们有

$$\sum_{s=1}^n \sum_{k=0}^m \frac{\mathcal{G}_{\sigma}^{(k+1)}}{\partial \mathcal{Q}_s^{(k)}} q_s + \frac{\mathcal{G}_{\sigma}}{\mathcal{Q}} = 0, \quad (\sigma = 1, \dots, \xi) \quad (6)$$

需要指出, 如果式 (1) 对 $q_s^{(m)}$ 是线性的, 设 $\frac{\mathcal{J}^{\beta}}{\partial \mathcal{Q}_s^{(m)}}$ 的最高阶为 r , 有 $r < m$, 则式 (4)、(5) 中不含 $q_s^{(m)}$, 式

(5) 中广义坐标的最高阶导数为 $q_s^{(r)}$, 此时只要对其求 $(m - r + 1)$ 阶导数即可得到类似于式 (6) 的式子.

将约束方程 (1) 对时间 t 求导数, 得到

$$\sum_{s=1}^n \sum_{k=0}^m \frac{\mathcal{J}^{\beta (k+1)}}{\partial \mathcal{Q}_s^{(k)}} q_s + \frac{\mathcal{J}^{\beta}}{\mathcal{Q}} = 0. \quad (\beta = 1, \dots, g) \quad (7)$$

联解方程 (6)、(7), 由方程的独立性, 我们可以解出 $q_s^{(m+1)}$, 记作

$$q_s^{(m+1)} = g_s(q_k, q_k, \dots, q_k, t), \quad (s, k = 1, \dots, n) \quad (8)$$

令

$$x_{kn+s} = q_s^{(k)}, \quad (k = 0, 1, \dots, m; s = 1, \dots, n) \quad (9)$$

则方程 (8) 可表为标准形式

$$\begin{aligned} x_{ln+s} &= x_{(l+1)n+s}, & (l = 0, 1, \dots, m-1; s = 1, \dots, n) \\ x_{mn+s} &= g_s(x_{kn+j}, t). & (k = 0, 1, \dots, m; j, s = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (10)$$

在变换 (9) 下, 运动方程 (5) 和约束方程 (1) 成为

$$\begin{aligned} G_{\sigma}(x_s, x_{n+s}, \dots, x_{mn+s}, t) &= 0, & (\sigma = 1, \dots, \xi) \\ f_{\beta}(x_s, x_{n+s}, \dots, x_{mn+s}, t) &= 0, & (\beta = 1, \dots, g) \end{aligned} \quad (11)$$

显然, 如果初条件满足 (11), 即

$$\begin{aligned} G_{\sigma}(x_s^0, x_{n+s}^0, \dots, x_{mn+s}^0, 0) &= 0, & (\sigma = 1, \dots, \xi) \\ f_{\beta}(x_s^0, x_{n+s}^0, \dots, x_{mn+s}^0, 0) &= 0. & (\beta = 1, \dots, g) \end{aligned} \quad (12)$$

则方程 (10) 的解给出高阶非线性非完整系统的运动. 从式 (12), 可以解得

$$x_{mn+s}^0 = h_s(x_s^0, x_{n+s}^0, \dots, x_{(m-1)n+s}^0). \quad (s = 1, \dots, n), \quad (13)$$

因此, 对于 m 阶非线性非完整系统来说, 其独立常数为 mn 个.

2 场方法的推广和应用

为积分方程 (10), 我们将文献 [7, 8] 所述的场方法的基本思想进一步加以推广. 根据场方法 [7, 8], 令某一个场变量, 例如 x_1 , 作为时间 t 以及其余场变量 x_A ($A = 2, \dots, (m+1)n$) 的函数,

即

$$x_1 = u(t, x_A) \quad (14)$$

将式(14)对 t 求导数,并利用式(10)的后面 $[(m+1)n-1]$ 个方程,得到

$$\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{a=2}^n \frac{\partial}{\partial x_a} x_{n+a} + \sum_{s=1}^n \sum_{b=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x_{bn+s}} x_{(b+1)n+s} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{mn+s}} g_s(u, x_A, t) - x_{n+1} = 0. \quad (15)$$

拟线性偏微分方程(15)可称为基本偏微分方程.假设已找到方程(15)的一个完全解,有形式

$$x_1 = u(t, x_A, c_\alpha), \quad \begin{cases} A = 2, \dots, (m+1)n; \\ \alpha = 1, \dots, (m+1)n. \end{cases} \quad (16)$$

将式(16)代入式(15),则式(15)成为恒等式.令运动的初条件为

$$x_\alpha(0) = x_\alpha^0 \quad (\alpha = 1, \dots, (m+1)n) \quad (17)$$

将式(17)代入式(16)可将一常数,如 c_1 用 x_α^0 和 c_A 表出,于是有

$$x_1 = u(t, x_A, c_A, x_\alpha^0). \quad (18)$$

类似于文献[8],容易证明初值问题(10)、(17)的解由式(18)以及下述 $[(m+1)n-1]$ 个代数方程来确定.

$$\frac{\partial}{\partial c_A} = 0, \quad (A = 2, \dots, (m+1)n) \quad (19)$$

于是所论高阶非线性非完整系统的解由式(18)、(19)和(12)构成.

3 说明性算例

例 设力学系统的位形由两个广义坐标 q_1, q_2 来确定,其动能为

$$T = (q_1^2 + q_2^2)/2, \quad (20)$$

而广义力

$$Q_1 = Q_2 = 0, \quad (21)$$

系统所受的约束为

$$f = 4q_2^2 \ddot{q}_2 + q_1^2 \ddot{q}_1^2 - 2at^2 q_2^2 = 0, \quad (22)$$

其中 a 为常数.试给出此三阶非线性非完整系统的解.

为解此三阶非线性非完整系统问题,首先,建立形如(10)的标准方程.Routh方程(2)给出为

$$q_1 = 2\lambda \ddot{q}_1, \quad q_2 = 4\lambda^2 \ddot{q}_2. \quad (23)$$

由式(23)第二式解出 λ 代入其第一式,有

$$\ddot{q}_1 = 2q_2, \quad (24)$$

将式(24)、(22)分别对时间 t 求导数,得

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= 2\ddot{q}_2, \\ 4q_2^2 \ddot{q}_2 + 8q_2 \ddot{q}_2^2 + \ddot{q}_1^3 + 2q_1 \ddot{q}_1 \ddot{q}_1 - 4atq_2^2 - 4at^2 q_2 \ddot{q}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

由方程(24)、(25),并利用约束方程(22),我们有

$$\ddot{q}_1 = 2\ddot{q}_2, \quad \ddot{q}_2 = -2q_2 + at \quad (26)$$

令

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1, & x_2 &= q_2, & x_3 &= \dot{q}_1, & x_4 &= \dot{q}_2, \\ x_5 &= q_1, & x_6 &= q_2, & x_7 &= \ddot{q}_1, & x_8 &= \ddot{q}_2 \end{aligned} \quad (27)$$

则方程(10)可写为

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3, & x_2 &= x_4, & x_3 &= x_5, & x_4 &= x_6, \\ x_5 &= x_7, & x_6 &= x_8, & x_7 &= 2x_8, & x_8 &= -2x_6 + at. \end{aligned} \quad (28)$$

其次,用场方法解方程(28).令

$$x_1 = u(t, x_A), \quad (A = 2, \dots, 8) \quad (29)$$

则基本偏微分方程为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_2} x_4 + \frac{\partial}{\partial x_3} x_5 + \frac{\partial}{\partial x_4} x_6 + \frac{\partial}{\partial x_5} x_7 + \frac{\partial}{\partial x_6} x_8 \\ & + \frac{\partial}{\partial x_7} (2x_8) + \frac{\partial}{\partial x_8} (-2x_6 + at) - x_3 = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

设式(30)有如下完全解

$$x_1 = u = f_1(t) + \sum_{A=2}^8 f_A(t) x_A. \quad (31)$$

将式(31)代入式(30),并比较自由项、含 x_A 的项,我们得到

$$\begin{aligned} \dot{f}_1 + atf_8 &= 0, \dot{f}_2 = 0, \dot{f}_3 - 1 = 0, \dot{f}_4 + f_2 = 0, \\ \dot{f}_5 + f_3 &= 0, \dot{f}_6 + f_4 - 2f_8 = 0, \dot{f}_7 + f_5 = 0, \dot{f}_8 + f_6 + 2f_7 = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

积分之,有

$$\begin{aligned} f_1 &= c_1 - ac_8 \left[-\frac{1}{2} t \sin \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} \right] + \frac{1}{2} ac_6 \left[-\frac{1}{2} t \cos \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} \right] \\ &+ \frac{1}{8} at^4 + \frac{1}{6} a(c_2 + 2c_3) t^3 - \frac{1}{4} a(c_4 + 2c_5 + 1) t^2, \\ f_2 &= c_2, \quad f_3 = t + c_3, \quad f_4 = -c_2 t + c_4, \\ f_5 &= -\frac{1}{2} t^2 - c_3 t + c_5, \\ f_6 &= -\frac{1}{2} c_8 \sin \frac{t}{2} + c_6 \cos \frac{t}{2} - \frac{1}{3} t^3 - c_3 t^2 + (2c_5 + 1)t + \frac{1}{2} c_2 + c_3 - 2c_7, \\ f_7 &= \frac{1}{6} t^3 + \frac{1}{2} c_3 t^2 - c_5 t + c_7, \\ f_8 &= c_8 \cos \frac{t}{2} - \frac{1}{2} c_6 \sin \frac{t}{2} - \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} (c_2 + 2c_3) t + \frac{1}{2} (c_4 + 2c_5 + 1). \end{aligned} \quad (33)$$

其中 c_α ($\alpha = 1, \dots, 8$)为常数.将式(33)代入式(31)并利用初值 $x_\alpha(0) = x_\alpha^0$ ($\alpha = 1, \dots, 8$)消去常数 c_1 ,我们得到

$$\begin{aligned} x_1 = u &= x_1^0 - c_2 x_2^0 - c_3 x_3^0 - c_4 x_4^0 - c_5 x_5^0 - (c_6 + \frac{1}{2} c_2 + c_3 - 2c_7) x_6^0 - c_7 x_7^0 \\ &- (c_8 + \frac{1}{2} c_4 + c_5 + \frac{1}{2}) x_8^0 + \frac{1}{2} ac_8 - ac_8 \left[-\frac{1}{2} t \sin \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} \right] + \frac{1}{2} ac_6 \\ &\left[-\frac{1}{2} t \cos \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} \right] + \frac{1}{8} at^4 + \frac{1}{6} a(c_2 + 2c_3) t^3 - \frac{1}{4} a(c_4 + 2c_5 + 1) t^2 \\ &+ c_2 x_2 + (t + c_3) x_3 + (-c_2 t + c_4) x_4 + (-\frac{1}{2} t^2 - c_3 t + c_5) x_5 + [-\frac{1}{2} c_8 \sin \frac{t}{2} \\ &+ c_6 \cos \frac{t}{2} - \frac{1}{3} t^3 - c_3 t^2 + (2c_5 + 1)t + \frac{1}{2} c_2 + c_3 - 2c_7] x_6 + (\frac{1}{6} t^3 + \frac{1}{2} c_3 t^2 - c_5 t \\ &+ c_7) x_7 + [c_8 \cos \frac{t}{2} - \frac{1}{2} c_6 \sin \frac{t}{2} - \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} (c_2 + 2c_3) t + \frac{1}{2} (c_4 + 2c_5 + 1)] x_8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -x_2^0 - \frac{1}{2}x_6^0 + \frac{1}{6}at^3 + x_2 - tx_4 + \frac{1}{2}x_6 - \frac{1}{2}tx_8 = 0, \\
& -x_3^0 - x_6^0 + \frac{1}{3}at^3 + x_3 - tx_5 + x_6 - t^2x_6 + \frac{1}{2}t^2x_7 - tx_8 = 0, \\
& -x_4^0 - \frac{1}{2}x_8^0 - \frac{1}{4}at^2 + x_4 + \frac{1}{2}x_8 = 0, \\
& -x_5^0 - x_8^0 - \frac{1}{2}at^2 + x_5 + 2tx_6 - tx_7 + x_8 = 0, \\
& -x_6^0 + \frac{1}{2}a[-\frac{1}{2}t\cos \overline{2t} + \frac{1}{2}\sin \overline{2t}] + \cos \overline{2t}x_6 - \frac{1}{2}\sin \overline{2t}x_8 = 0, \\
& -x_7^0 + 2x_6^0 - 2x_6 + x_7 = 0, \\
& -x_8^0 + \frac{1}{2}a - a[-\frac{1}{2}t\sin \overline{2t} + \frac{1}{2}\cos \overline{2t}] \\
& + \overline{2}\sin \overline{2t}x_6 + \cos \overline{2t}x_8 = 0.
\end{aligned} \tag{35}$$

解之,得

$$\begin{aligned}
x_8 &= x_8^0 \cos \overline{2t} - \overline{2} \sin \overline{2t} x_6^0 - \frac{1}{2} a \cos \overline{2t} + \frac{1}{2} a, \\
x_7 &= x_7^0 - 2(1 - \cos \overline{2t}) x_6^0 + \overline{2} \sin \overline{2t} x_8^0 - \frac{1}{2} a \sin \overline{2t} + at, \\
x_6 &= x_6^0 \cos \overline{2t} + \frac{1}{2} \sin \overline{2t} x_8^0 - \frac{1}{2} a \sin \overline{2t} + \frac{1}{2} at, \\
x_5 &= x_5^0 - 2(t - \frac{1}{2} \sin \overline{2t}) x_6^0 + tx_7^0 + (1 - \cos \overline{2t}) x_8^0 \\
& - \frac{1}{2} a(1 - \cos \overline{2t}) + \frac{1}{2} at^2, \\
x_4 &= x_4^0 + \frac{1}{2} \sin \overline{2t} x_6^0 + \frac{1}{2} (1 - \cos \overline{2t}) x_8^0 - \frac{1}{4} a(1 - \cos \overline{2t}) + \frac{1}{4} at^2, \\
x_3 &= x_3^0 + tx_5^0 - t^2 x_6^0 + (1 - \cos \overline{2t}) x_6^0 + \frac{1}{2} t^2 x_7^0 \\
& + (t - \frac{1}{2} \sin \overline{2t}) x_8^0 - \frac{1}{2} a(t - \frac{1}{2} \sin \overline{2t}) + \frac{1}{6} at^3, \\
x_2 &= x_2^0 + tx_4^0 + \frac{1}{2} (1 - \cos \overline{2t}) x_6^0 + \frac{1}{2} (t - \frac{1}{2} \sin \overline{2t}) x_8^0 \\
& - \frac{1}{4} a(t - \frac{1}{2} \sin \overline{2t}) + \frac{1}{12} at^3.
\end{aligned} \tag{36}$$

将式(36)代入式(34),我们得到

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_1^0 + tx_3^0 + \frac{1}{2} t^2 x_5^0 - \frac{1}{3} t^3 x_6^0 + (t - \frac{1}{2} \sin \overline{2t}) x_6^0 + \frac{1}{6} t^3 x_7^0 + \frac{1}{2} t^2 x_8^0 \\
& - \frac{1}{2} (1 - \cos \overline{2t}) x_8^0 - \frac{1}{4} at^2 + \frac{a}{4} (1 - \cos \overline{2t}) + \frac{1}{24} at^4.
\end{aligned} \tag{37}$$

式(36)、(37)便是方程(28)的解.

最后,求原三阶非线性非完整系统的解.运动方程(24)及约束方程(22)对初条件的限制为

$$x_7^0 = 2x_6^0, \quad 4(x_6^0)^2 x_8^0 + x_5^0 (x_7^0)^2 = 0. \tag{38}$$

解得

$$x_7^0 = 2x_6^0, \quad x_8^0 = -x_5^0. \tag{39}$$

联合式(36) 、(37) 和(39) , 就得到本问题的解, 其中有六个独立常数.

参 考 文 献

1 梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京: 北京工业学院出版社, 1985
2 张 毅. 高阶非完整系统在准坐标下的新型运动微分方程. 黄淮学刊, 1992, 8 (4) : 31~35
3 Luo Shaokai. The B-H Equations for Variable Mass Higher-order Nonholonomic Mechanical Systems in Noninertial Reference Frames. Chinese Science Bulletin, 1992, 37 (10) : 878~880
4 梅凤翔. 高阶非完整系统运动方程的 Routh 阵阶法. 科学通报, 1990, 35 (16) : 1221~1224
5 梅凤翔. 高阶非完整系统运动方程的一类积分. 应用数学和力学, 1991, 12 (8) : 749~756
6 张 毅. 变质量力学系统万有 D'Alembert 原理的普遍形式. 固体力学学报, 1993, 14 (4) : 357~361
7 Vujanovic B. A Field Method and its Application to the Theory of Vibrations. Int. J. Non-Linear Mechanics, 1984, 19: 383~396
8 Mei Feng Xiang, A Field Method for Solving the Equations of Motion of Nonholonomic Systems Acta Mechanica Sinica, 1989, 5 (3) : 260~268

A Method of Integration for High-Order
Nonlinear Nonholonomic Systems

Zhang Yi

(Suzhou Institute of Urban Construction & Environmental Protection)

Abstract This paper presents a field method for the integration of the equations of motion of high-order nonlinear nonholonomic systems, and gives an example to illustrate the application of the results.

Key words Equation of motion; High-order nonholonomic system; Method of integration; Field method