

# 悬臂裂纹梁的横向振动响应分析

陈梦成 胡宗陵 姜 羌

(土木工程系) (南昌铁路分局)

**摘 要** 提出了一种应用线弹簧模型分析裂纹梁固有频率响应的新方法. 该方法是建立在古典的 Euler-Bernoulli 梁理论、现代的模态分析和断裂力学等成就基础上的综合性方法. 利用该方法导出了悬臂裂纹梁振动的特征方程, 求解这个方程, 建立了固有频率与裂纹位置、长度间关系. 本文的计算结果与现有结果基本一致.

**关键词** 悬臂裂纹梁; 线弹簧模型; 固有频率

**分类号** O346. 1

## 0 引 言

众所周知, 任何结构都会因其局部损伤或缺陷的存在而引起其弹性特性变化, 在动态或稳态的载荷作用下, 这种变化变得尤为明显. 梁是一个重要的基本构件, 因此, 研究裂纹梁的动态响应, 无疑对了解其它裂纹构件的动态现象有着重要的指导意义.

研究裂纹对梁的动态响应的影响, 目前主要有解析法和数值法两种方法. 本文采用解析法来研究. 在过去采用解析法中, 用得最多的模型是扭转弹簧模型, 该模型最初是由 Chondros 和 Dimarogonas<sup>[1]</sup> 提出的, 以后, 陆续有些学者相继使用这个模型(沈和唐<sup>[2]</sup>、Arauj Gomes 和 Montalva E Silva<sup>[3]</sup>). 这里需指出, 该模型只涉及到单一荷载——弯矩. 而对于有复合荷载作用, 如有弯矩、剪力甚至于轴力作用, 此时, 该模型并不适用. 这就需要人们重新建立在复合荷载作用下的解析模型. 本文正是基于这种动机, 试图提出适合复合荷载作用的解析模型. 在解析法中, 除上述的扭转弹簧模型外, 还有人使用过 Laplace 变换法<sup>[4]</sup>, 摄动法<sup>[5]</sup> 以及变分法<sup>[6]</sup>.

本文采用断裂力学中常用的一种评价裂纹应力强度因子的近似线弹簧模型方法, 提出一个在复合荷载作用下, 裂纹梁的振动响应分析的解析模型. 线弹簧模型最初是由 Rice 和 Levy<sup>[7]</sup> 提出的. 为了使其适应于本文横向振动问题的研究, 我们需要对 Rice 和 Levy 的线弹簧模型作一些修正, 然后, 再利用修正的模型, 导出悬臂裂纹梁振动响应的特征方程, 求解此方程, 确定固有频率, 并与现有结果作一比较.

## 1 分析原理

### 1.1 Rice-Levy 模型

Rice-Levy 模型(本文简称为 RL 模型) 为线弹簧模型,它是被用来构造表面裂纹问题的解析模型.图 1 描绘了 RL 模型的基本构件部分.模型假定:(1) 表面裂纹为贯穿裂纹,其长度等于表面裂纹长;(2) 韧带效应用直接作用于此贯穿裂纹面上的闭合力和弯矩来替代,这些力和弯矩通过柔度系数与韧带变形发生关系,犹如韧带是由一组“弹簧”联接而成.很明显,这组“弹簧”应是无质量、无长度.

### 1.2 修正的 RL 模型及其分析原理

为了能够使 RL 模型适用于本文的裂纹梁横向振动问题的研究,需要对原有的 RL 模型作一些修正.图 2 给出了修正的线弹簧模型基本构成及其作用其上的相关力和作用方向.

由于线弹簧模型长度为零,故其两侧具有同一  $x$  坐标值,作用在线弹簧模型上内力将有

$$M_1 = M_2 = M, \quad (1)$$

$$Q_1 = Q_2 = Q. \quad (2)$$

由于在零长度的线弹簧模型内,作用在其上的剪力  $Q$  和弯

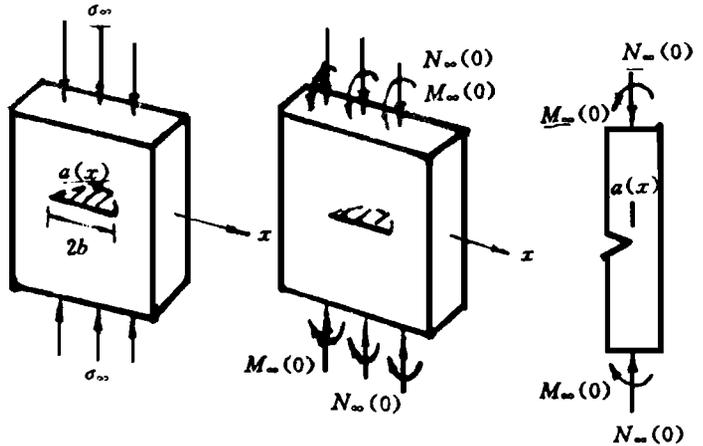
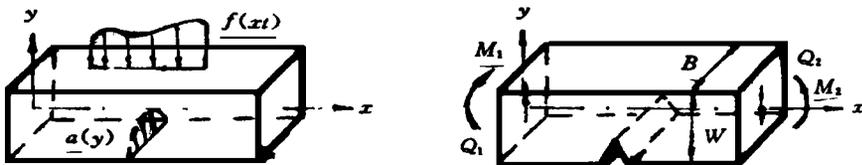


图 1 R-L 模型基本构成



(a) 横向荷载作用的裂纹梁

(b) 修正的线弹簧模型

图 2

矩  $M$  不产生相互影响,故作用线弹簧模型上的力与变形的关系,由 Hooke 定律得

$$M = \frac{1}{\lambda_m} \theta \quad (3)$$

$$Q = \frac{1}{\lambda_q} y, \quad (4)$$

其中转角  $\theta$ 和挠度  $y$  分别为线弹簧模型两侧的转角差与挠度差,即  $\theta = \theta_1 - \theta_2; y = y_2 - y_1; \lambda_m$  和  $\lambda_q$  分别为由弯矩  $M$  和剪力  $Q$  产生的柔度系数.根据能量释放定律,有

$$G_M = \frac{K_{1M}^2}{E} = \frac{M^2}{2B} \frac{d\lambda_m}{da}, \quad (5)$$

$$G_Q = \frac{K_{1Q}^2}{E} = \frac{Q^2}{2B} \frac{d\lambda_q}{da}. \quad (6)$$

对式(5)、(6) 两边积分后

$$\lambda_m = \frac{2B}{E} \int_0^a \left( \frac{K_{\perp M}}{M} \right)^2 da \tag{7}$$

$$\lambda_q = \frac{2B}{E} \int_0^a \left( \frac{K_{\parallel Q}}{Q} \right)^2 da. \tag{8}$$

其中  $E$  为弹性模量,  $B$  为裂纹梁厚度,  $a$  为裂纹的长度.  $K_{\perp M}$  是由弯矩  $M$  产生的应力强度因子,  $K_{\parallel Q}$  为剪力  $Q$  引起的应力强度因子, 它们分别与裂纹结构的几何形状系数有关, 写成

$$K_{\perp M} = 6M \sqrt{\overline{F_M(\xi)}/(W^2 \cdot B)}, \quad 0 \leq \xi < 0.6 \tag{9}$$

$$F_M(\xi) = \left( \frac{2}{\pi\xi} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) \{0.923 + 0.199[1 - \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)]^4\} \right) \sqrt{\cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)},$$

$$K_{\parallel Q} = Q \cdot F_Q(\xi)/(B \cdot W - a), \quad 0 \leq \xi < 1 \tag{10}$$

$$F_Q(\xi) = 1.999\xi + 4.513\xi^2 - 9.516\xi^3 + 4.482\xi^4.$$

其中  $\xi = a/W$ ,  $W$  是裂纹梁的宽度. 式(9) 是由 Tada 等人<sup>[8]</sup> 给出的, 而式(10) 则是由 Tharp<sup>[9]</sup> 得到的.

### 1.3 裂纹梁的振型

图 3(a) 所示的自由体梁, 根据 Emler-Bernoulli 梁, 则其作自由振动的运动方程为

$$EI = \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{11}$$

其中  $EI$  为抗弯刚度,  $\rho$  为梁的质量密度,  $A$  为梁的横截面面积. 利用模态分析求和规则, 式(11) 的解可表为

$$y(x,t) = \sum_{n=1} Y_n(x) \exp(i\omega_n t) \tag{12}$$

式中  $Y_n(x)$  是第  $n$  阶振型,  $\omega_n$  是第  $n$  阶固有圆频率. 将式(12) 代入式(11) 得

$$\frac{d^4 Y_n(x)}{dx^4} - \lambda_n^2 Y_n(x) = 0, \tag{13}$$

其中 
$$\lambda_n = \frac{\rho A \omega_n^2}{EI}. \tag{14}$$

式(13) 的通解为

$$Y_n(\beta) = A_n \cosh \lambda L \beta + B_n \sinh \lambda L \beta + C_n \cos \lambda L \beta + D_n \sin \lambda L \beta, \tag{15}$$

式中  $A_n, B_n, C_n, D_n$  是由边界条件确定的常数,  $\beta = \frac{x}{L}$ ,  $L$  为裂纹梁的长度. 线弹簧模型将裂纹梁分为两部分, 则相应于每部分的振型由式(15) 可分别表示为

$$Y_{n1}(\beta) = A_{n1} \cosh \lambda L \beta + B_{n1} \sinh \lambda L \beta + C_{n1} \cos \lambda L \beta + D_{n1} \sin \lambda L \beta, \quad 0 \leq \beta \leq L_c/L \tag{16}$$

$$Y_{n2}(\beta) = A_{n2} \cosh \lambda L \beta + B_{n2} \sinh \lambda L \beta + C_{n2} \cos \lambda L \beta + D_{n2} \sin \lambda L \beta, \quad L_c/L \leq \beta < 1. \tag{17}$$

其中  $A_{n1}, B_{n1}, C_{n1}, D_{n1}$  和  $A_{n2}, B_{n2}, C_{n2}, D_{n2}$  可分别由边界条件和连接条件确定.  $L_c$  表示裂纹沿梁的位置, 如图 3(b) 所示.

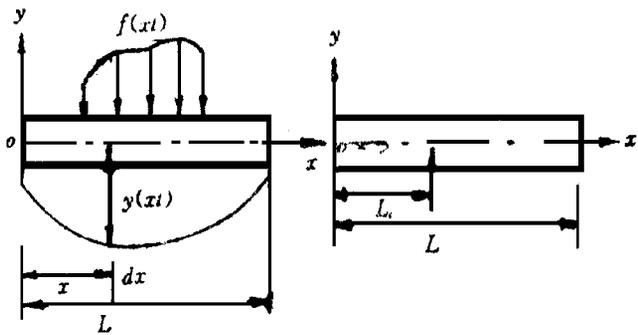


图 3 各种梁结构图

## 2 应用举例

为了验证本文方法的精度和收敛性,我们考察了悬臂裂纹梁的固有频率响应变化情况.为便于比较分析,我们还将给出 Gudmundson 的实验结果<sup>[5]</sup>.

由图 4 所示悬臂裂纹梁的几何图形知,裂纹梁的边界条件为

$$Y_{n1}(0) = 0, \quad Y'_{n1}(0) = 0, \quad \beta = 0. \quad (18)$$

$$Y_{n2}(1) = 0, \quad Y'''_{n2}(1) = 0, \quad \beta = 1. \quad (19)$$

裂纹处的连接条件,由式(1)~(4),分别有

$$Y''_{n1}(\beta_c) = Y''_{n2}(\beta_c), \quad \beta_c = L_c/L. \quad (20)$$

$$Y'''_{n1}(\beta_c) = Y'''_{n2}(\beta_c),$$

$$\text{和} \quad Y'_{n2}(\beta_c) - Y'_{n1}(\beta_c) = \lambda_{mm}EIY''_{n1}(\beta_c), \quad (21)$$

$$Y_{n2}(\beta_c) - Y_{n1}(\beta_c) = \lambda_{\eta\eta}EIY'''_{n1}(\beta_c).$$

由式(18)~(21),可得特征方程

$$\frac{\lambda_{\eta\eta}EIY'''_{n1}(\beta_c) + \lambda_{mm}EIY''_{n1}(\beta_c) = 2(B_1 - B_2 + F_1) + \lambda EI[\lambda_{\eta\eta}\lambda(B_2 - B_3)F_2 + \lambda_{mm}(B_1 - B_2)F_3]}{2(B_1 - E_2) + \lambda EI(\lambda_{\eta\eta}\lambda B_2 F_2 + \lambda_{mm}B_1 F_3)}. \quad (22)$$

进而,可确定悬臂裂纹梁的固有频率.式中的所有新的变量定义请参看附录.

由式(22)得到的解与 Gudmundson 的结果<sup>[5]</sup>进行比较,图 5 描绘了不同裂纹长度对应于

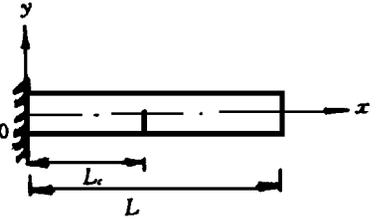
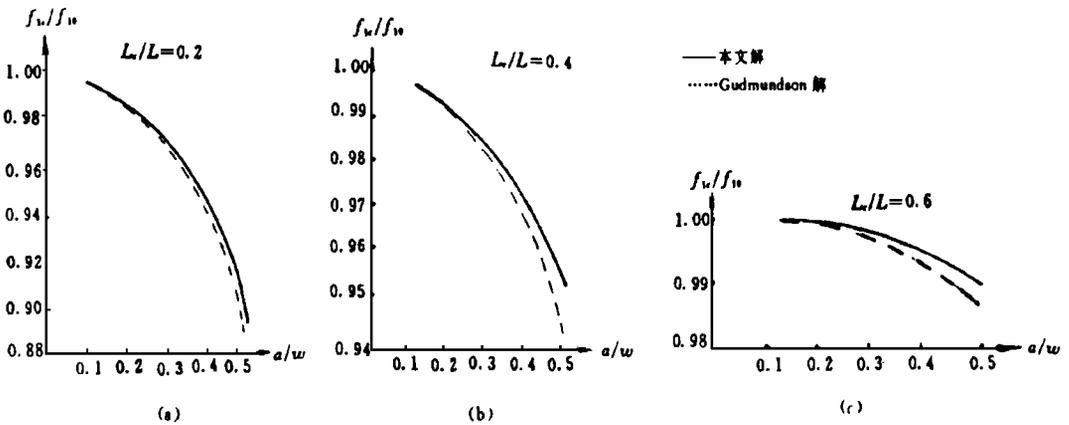


图 4 悬臂裂纹梁



注:  $f_{1c}$  有裂纹悬臂梁的第一固有频率;  $f_{10}$  无裂纹悬臂梁的第一固有频率

图 5 裂纹位置与固有频率

三个不同裂纹位置时,悬臂裂纹梁的第一固有频率响应变化情况,从中看出,两者结果基本一致,而且随裂纹位置离固定端的距离增加,裂纹对固有频率的影响减弱.

图 6 表明同一裂纹位置,不同阶固有频率的变化情况,它也说明两者结果基本一致,而且对同一裂纹而言,随着固有频率阶数的增加,裂纹对固有频率的影响减弱.

### 3 结束语

本文讨论了一种以线弹簧模型为基础的分析裂纹梁动态响应的新方法. 该方法可扩展到其它边界条件的裂纹结构中, 请参看文献[10].

通过对悬臂梁的分析, 我们可得三个有用结论:

- (1) 裂纹越长, 其对固有频率的影响越大;
- (2) 固有频率的阶数愈高, 裂纹对其的影响越小;
- (3) 随着裂纹位置距固定端距离增加, 裂纹对固有频率的影响减弱.

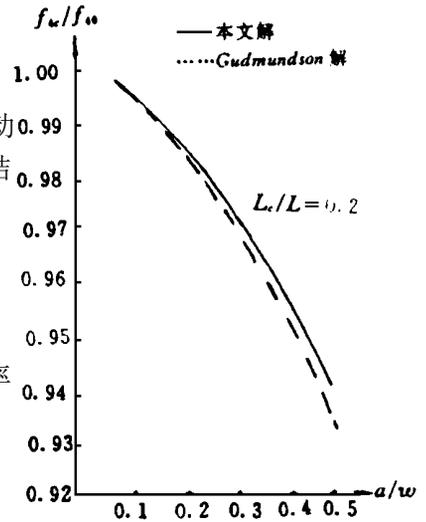


图 6 裂纹位置与第四固有频率

### 参 考 文 献

- 1 Chondros I G, Dimarogonas A D. Identification of Cracks in Welded Joints of Complex Structures. J. Sound & vib., 1980, 69: 531~538
- 2 沈亚鹏, 唐照千. 裂纹对悬臂板振动频谱的影响. 固体力学学报, 1982, (3): 247~251
- 3 Araujo Gomes A J M, Montalvao E Silve J M. Theoretical and Experimental Data on Crack Depth Effects in the Dynamic Behavior of Free-free beam. Proc. Florence Modal Anal conf., 1991, (1): 15~24
- 4 Nash G E. Bending Deflections and Moments in a Notched Beam. Engng Fract. Mech., 1971, (3): 139~150
- 5 Gudmundson P. Eigenfrequency Changes of Structures due to cracks, notches or other geometrical changes. J. Mech. phys. Solids, 1982, 30: 339~353
- 6 Christides S, Barr A D S. One-dimensional Theory of Cracked Bernoulli-Euler Beams. Int. J., Mech Sci., 1984, 26: 639~648
- 7 Rice J R, Lery N. The Part-through Surface Crack in an Elastic Plate. J. Appl. Mech., 1972, 39: 185~194
- 8 Tada H, Paris P C, Irwin G R. The Stress Analysis of Crack Handbook. Hellertown, Del Research Corp., PA, 1973
- 9 Tharp T M. A Finite Element for Cracked Beam Columns. Int. J. Numer Methods Engng. 1987, 24: 1941~1950
- 10 Chen Mengcheng. An Approximate Analysis of Frequency for a Binged-binged Cracked Beam. Acta Solida Mechnica Sini (a)

# An Analysis of Horizontal Dynamic Responses of Vibrations for a Cracked Cantilever

Chen Mengcheng Hu Zonglin

Jiang Qiang

(Department of Civil Engineering)

(Nanchang Railway Branch Bureau)

## Abstract

In this paper a new method was proposed to analysis the natural frequency responses of cracked beams by using Line-Spring model. The method was a comprehensive one based on the classical Euler-Bernoulli beam theory, modern modal analysis and fracture mechanics. A characteristic equation for a cracked cantilever was derived by means of method. The relationships between the natural frequency and the crack position or crack length by solving the equation, the present results obtained are in excellent agreement with available results.

## Key words

Cracked cantilever; Line-spring model; Natural frequency

## 附录

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \sinh \lambda L \cdot \sin \lambda L, & A_2 &= \cosh \lambda L \cdot \cos \lambda L, & A_3 &= \sinh \lambda L \cdot \cos \lambda L, & A_4 &= \cosh \lambda L \cdot \sin \lambda L, \\
 B_1 &= \sinh \lambda L \beta_c + \sin \lambda L \beta_c, & B_2 &= \cosh \lambda L \beta_c + \cos \lambda L \beta_c, & B_3 &= \sinh \lambda L \beta_c - \sin \lambda L \beta_c, \\
 C_1 &= \cosh \lambda L \beta_c - \sin \lambda L \beta_c, & C_2 &= \cos \lambda L \beta_c + \sin \lambda L \beta_c, & C_3 &= \sin \lambda L \beta_c - \cos \lambda L \beta_c, \\
 D_1 &= \sinh \lambda L \beta_c \sin \lambda L \beta_c + \cosh \lambda L \beta_c \cos \lambda L \beta_c, & D_2 &= \sinh \lambda L \beta_c \sin \lambda L \beta_c - \cosh \lambda L \beta_c \cos \lambda L \beta_c, \\
 D_3 &= \sinh \lambda L \beta_c \cos \lambda L \beta_c - \cosh \lambda L \beta_c \sin \lambda L \beta_c, & D_4 &= \cosh \lambda L \beta_c \sin \lambda L \beta_c + \sinh \lambda L \beta_c \cos \lambda L \beta_c, \\
 E_1 &= \cosh \lambda L \beta_c - (A_2 - A_1) \cos \lambda L \beta_c - (A_3 + A_4) \sin \lambda L \beta_c, \\
 E_2 &= \sin \lambda L \beta_c - (A_3 - A_4) \cos \lambda L \beta_c - (A_1 + A_2) \sin \lambda L \beta_c, \\
 F_1 &= C_1 + (A_1 - A_4) C_2 + (A_2 - A_1) C_3, \\
 F_2 &= 1 + A_1 D_1 + A_2 D_2 + A_3 D_3 - A_4 D_4, & F_3 &= A_1 D_4 - A_2 D_3 - A_3 D_2 - A_4 D_1.
 \end{aligned}$$