13个点的树的构造*

周　尚　超

(基础课部)

摘　要　构造了13个点的树1301棵⒀

关键词　图;树;邻接向量

分类号　O 157.5

0　引　言

本文中的图 G 均为无向简单图,其点边集分别是 $V(G)$ 和 $E(G)$⒀如 G 是连通图且 $|V(G)|=|E(G)|+1$,则 G 是树,文献[1]给出所有 $m\leqslant 10$ 个点的树的图解⒀所有有 $m\leqslant 12$ 个点的树由普林斯作出[2,3]⒀点数 $m\leqslant 20$ 的树的个数 t_m 由下表给出⒀

点数 m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
t_m	1	1	2	3	6	11	23	47	106	235
点数 m	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
t_m	551	1301	3159	7741	19320	48629	123867	317995	823065	

设 T 是 m 个点 n 条边的树($n=m-1$)⒀$V(T)=\{1,2,\cdots,m\}$⒀称 i 为 T 的第 i 点,i 点或编号为 i 的点⒀任取 T 的一个点为1点,记 $a_1=0$;任取与1邻接的一个点为2点,记 $a_2=1$;T 是连通图,在 $T-\{1,2\}$ 中必有与1或2邻接的点,任取一个这样的点为3点,若3与1(或2)邻接,则记 $a_3=1$(或2);任取 $T-\{1,2,3\}$ 中的与 $\{1,2,3\}$ 邻接的点为4点,若4与 i($i\in\{1,2,3\}$)邻接,则记 $a_4=i$⒀如此进行下去,我们得到向量 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$⒀A 称为树 T 的邻接向量,称 T 可用 A 表示⒀A 具有性质:$a_1=0$;$1\leqslant a_i\leqslant i-1$,$i>1$;反之,设 A 是具有此性质的 m 维整数向量⒀令 T 的边集为 $\{(1,2),(a_3,3),(a_4,4),\cdots,(a_m,m)\}$,则 T 有 n 条边⒀对任意点 j,j 与且仅与1个编号比 j 小的点邻接,因此,必有一条邻接 j 到1的道路,T 是连通图,T 是树⒀自然地,称 (a_j,j) 为 T 的第 $j-1$ 条边⒀由于 $a_1=0$,在具体的向量中略去不写,有时将括号也略去⒀例如 $A_1=(0,1,1,\cdots,1)$ 用 $A_1=11\cdots1$ 或 $A_1=1^n$ 表示⒀$A_1=1^n$,$A_2=1^{n-1}2$,$A_3=1112544678$,$A_4=112454768$,$A_5=12\cdots n$,$A_6=111223344$,$A_7=1112233445$ 这7个向量表示的图 T_i($1\leqslant i\leqslant 7$)画在图1中⒀

收稿日期:1995-10-05.　　周尚超,男,1948年生,教授⒀

* 江西省自然科学基金资助课题

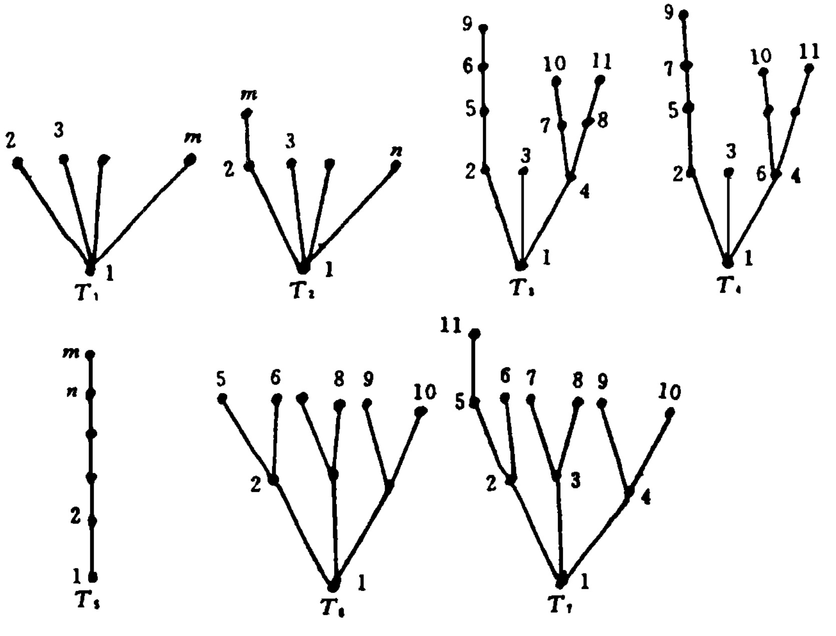

图1

对于向量A,我们按如下方式画出A表示的图⒀将第1点称为根或第1水平(代)点,把T看作一棵向上生长的树⒀若$a_j=i$,则称j是i的子女,i是j的父母⒀第1点的子女称为第二水平(代)点,第二水平上的点的子女称为第三水平上的点,依此类推⒀若$a_i=a_j$且$i<j$,则称i是j的哥哥,且将i画在j的左边⒀

设d_i是A的分量中等于i的个数,deg$i$是第i点的度,则$\deg 1=d_1$;deg$i=d_i+1$,$i>1$;d_i是第i点的子女的个数⒀

如果我们给出所有m维邻接向量,就给出了所有m个点的树,但这些树中有许多是同构的⒀易知m维邻接向量是处于$(0,1,1,\cdots,1)$与$(0,1,2,\cdots,n)$之间的所有向量,共有$n!$个,$n!$比t_m大得多⒀例如$9!=362880$,而$t_{10}=106$,即平均每棵10阶树可用3628个向量表示⒀因此,我们要研究两个向量在何条件下它们表示的树是同构的,以及用满足某些条件的向量来表示树⒀

1　最小树向量

在下文中,将树T与表示T的向量A等同看待,即说树A就是说A表示的树⒀说A_1与A_2同构就是说它们表示的树同构⒀

设$A=(a_1,a_2,\cdots a_m)$,$B=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$,若$a_1=b_1$,$a_2=a_2$,$\cdots$,$a_i=b_i$,$a_{i+1}<b_{i+1}$,则称A小于B,记为$A<B$⒀设A表示T,若对任意表示T的向量B,都有$A\leqslant B$,则称A是表示T的最小树向量⒀

引理1　设$A=(a_1,a_2,\cdots,a_i,a_{i+1},\cdots a_m)$,$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_i$,$a_i>a_{i+1}$,$B=(a_1,a_2,\cdots,a_{i+1},a_i,$

$b_{i+2},\cdots b_m)$⒀当 $j>i+1$时,若 $a_j\neq i,i+1$,则,$b_j=a_j$;当 $a_j=i$,则 $b_j=i+1$;当 $a_j=i+1$,则 $b_j=i$⒀则 A 与 B 同构,且 $B<A$⒀

证明 作映射f:当$j\neq i,i+1$时$f(j)=j$;$f(i)=i+1$;$f(i+1)=i$;由图2知f 是A 的边到 B 的边的$1-1$映射,A 与 B 同构⒀

A 的边 $(1,2)(a_3,3)\cdots(a_i,i)(a_{i+1},i+1)\cdots(a_j,j)\cdots$

B 的边 $(1,2)(a_3,3)\cdots(a_{i+1},i)(a_i,i+1)\cdots(b_j,j)\cdots$

图 2

例如$A_3=1112544678$与$A_4=1112454768$同构(图1中的 T_3与 T_4)⒀

若 $a_i\leqslant a_{i+1}$,$i=1,2,\cdots,n$,则称A 是升序向量⒀

定理1 设A 是最小树向量,则A 是升序向量且第1个点是度最大的点,且 $d_1>d_i,i>1$⒀

证明 设A 是表示 T 的最小向量⒀若A 不是升序向量,由引理1,存在B,使A 与B 同构且$B<A$,矛盾⒀设A 的第1点不是最大度点,我们可取一个最大度点为第1点,得到表示T 的向量B,逐步用引理1可得与B 同构的升序向量 C,C 的等于1的分量比A 的多,$C<A$,矛盾⒀

以下我们仅讨论升序向量与第1点度最大的向量⒀

设$A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$是表示树 T 的向量⒀$B=(a_1,a_2,\cdots,a_i)$,$i<m$,则称B 是A 的子向量,A 是B 的扩张⒀显然子向量也是树的邻接向量⒀B 是 $T-\{i+1,i+2,\cdots,m\}$的邻接向量⒀

定理2 设A 是最小树向量,则A 的任意子向量B 是最小树向量⒀

证明 我们只要证$B=(a_1,a_2,\cdots,a_{m-1})$是最小即可⒀设$B$ 不是最小,C 是表示 $T-m$ 的最小向量,即$(a_1,a_2,\cdots,a_{m-1})>C=(c_1,c_2,\cdots,c_{m-1})$⒀设在 T 中与 m 点邻接的 C 的点是j,则 $C=(c_1,c_2,\cdots,c_{m-1}j)$表示 T,且 $C<A$,矛盾⒀

设f 是图 G 的自同构,$u_1,u_2\in V(G)$⒀若$f(u_1)=u_2$,则称 u_1与 u_2相似⒀以下引理是显然的⒀

引理2 设u_1,u_2是G 的两个相似点⒀在 u_1和 u_2处分别增加 k 条和 h 条悬挂边得到图 G_{kh}⒀在 u_1和 u_2处分别增加 h 条和 k 条悬挂边得到图 G_{hk},则 G_{kh}与 G_{hk}同构,这里 $h\geqslant 0,k\geqslant 0$⒀(见图3)

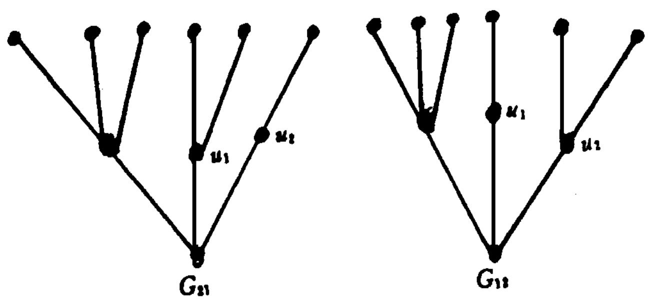

图3

设$B=(a_1,a_2,\cdots,a_k)$是最小树向量⒀按相似关系,将$\{a_k,a_{k+1}+1,\cdots,k\}$分别为若干组,在同一组中任何两点相似,不同组中的点不相似⒀由各组中编号最小且度不是最大的点组成的集称为B 的最小不相似点集,记为$\mathrm{Min}B$⒀

例1 $A_6=111223344$是最小向量⒀(图1中的 T_6) $\{4,5,6,7,8,9,10\}$中除4外任何两点相

似⒀是最大度点,因此,$\mathrm{Min}A_6=\{5\}$⒀

定理3　设 $B=(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 是最小树向量⒀若 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{k+1})$ 是最小树向量,则 $a_{k+1}\in\mathrm{Min}B$⒀

证明　设 $a_{k+1}=j\in\mathrm{Min}B$⒀如果 j 是 B 的最大度点,则 A 的第1点不是最大度点⒀如 j 不是最大度点,则有 $i<j$ 且 i 与 j 相似⒀由引理2 $(a_1,a_2,\cdots,a_k i)$ 与 A 同构且 $(a_1,a_2,\cdots,a_k i)<A$,矛盾⒀

例2　求出形为111223344$a_{11}a_{12}a_{13}$的所有最小向量⒀由例1知 $a_{11}=5$,$A_7=1112233445$的图 T_7 见图1⒀由定理3 $a_{12}\in\mathrm{Min}A_7=\{5,6,7,11\}$.

情形1　$a_{12}=5$,$a_{13}=\{6,7,11\}$这3个都是最小向量⒀

情形2　$a_{12}=6$,$a_{13}=\{6,7,11\}$,$a_{13}=7,11$是最小向量⒀

情形3　$a_{12}=7$,$a_{13}\in\{7,8,9,11\}$,$a_{13}=9,11$是最小向量⒀

情形4　$a_{12}=11$,$a_{13}\in\{11,12\}$,这两个都是最小向量⒀

因此,共有9个最小的量⒀

定理4　设 A 是树 T 的最小向量⒀若 $a_i=a_{i+1}$,则 $d_i\geqslant d_{i+1}$⒀

证明　记 $j=i+1$⒀不妨设 $d_i=3<d_j=4$⒀则 A 有子向量 $B=(\cdots iiijjjj)$,B 是最小向量⒀设 C 是将 B 后7个分量变为 $iiiijjj$ 后的向量,则 $C<B$⒀将7个分量去掉后第 i,j 点是与同一点 a_i 邻接的两个悬挂点,i 与 j 相似⒀C 与 B 同构(引理2),与 B 最小矛盾⒀

定理5　设 A 是树 T 的最小向量,$d_1=d_i+1=h$,$i>1$,即第 i 点也是最大度点⒀设与1和 i 邻接的 h 个点的度分别为 $p_1\geqslant p_2\geqslant\cdots\geqslant p_h$ 和 $k_1\geqslant k_2\geqslant\cdots\geqslant k_h$,则 $(p_1,p_2,\cdots p_h)\geqslant(k_1,k_2,\cdots,k_h)$⒀

证明　A 有 p_1-1个2,p_2-1个3,…,p_h-1个 $h+1$⒀若取第 i 个点为第1点,与 i 邻接度为 K_j 的点为第 $j+1$个点得向量 B,则 B 有 k_1-1个2,k_2-1个3,…,k_h-1个 $h+1$⒀若 $(p_1,p_2,\cdots,p_n)<(k_1,k_2,\cdots,k_n)$,则 $A<B$⒀矛盾⒀

我们用计算机可得到满足定理1,4,5的条件的向量⒀当 $m=13$时,这些向量有2600个⒀将不是最小的向量去掉就得到1301个最小向量⒀最大度为 i 的13个点的树的个数 s_i 如下表⒀

最大度 i	2	3	4	5	6	7	8	9
s_i	1	264	537	296	125	47	19	7
最大度 i	10	11	12					
s_i	3	1	1					

参　考　文　献

1　Harary F. Graph Theory. Reading Mass, 1969
2　Prins G. The Automorphism Group of a Tree. Doctoral Dissertation, University of Michgan, 1957
3　Harary F, Prins G. Enumeration of Bicolourables Graphs. Canad. J. Math. 1963, 15: 237~248

On the Construction of Trees on 13 Nodes

Zhou Shangchao

(Department of Basic Courses)

Abstract We compiled a catalog of all the 1301 tree on 13 nodes.

Key words Graph; Tree; Adjacency vector

附录 1301棵13点的树

附录分3个部分19第一部分列出最大度为12,11,10,9,8,7,6,5的树499棵19第二部分为最大度为4的树537棵19第三部分是最大度为3的树264棵和最大度为2的树1棵19向量(…,10,11,12)如用…10,11,12表示就不太好看19因此,我们分别用a,b,c表示10,11,1219限于篇幅,只列出第一部分19.

一、499棵 最大度=12,11,10,9,8,7,6,5

1^{12}	1^{8}2aaa	1^{7}2299b	1^{6}222238	1^{6}223348	1^{6}223aaa	1^{6}23488b	1^{6}28899a
1^{11}2	1^{8}2aab	1^{7}229ab	1^{6}22223c	1^{6}22334c	1^{6}223aab	1^{6}23489a	1^{6}28899b
1^{10}22	1^{8}2abb	1^{7}229bb	1^{6}222288	1^{6}223388	1^{6}223abb	1^{6}23489b	1^{6}2889ab
1^{10}23	1^{8}2abc	1^{7}229bc	1^{6}222289	1^{6}223389	1^{6}223abc	1^{6}2348bb	1^{6}2889bb
1^{10}2C	1^{7}22222	1^{7}23456	1^{6}22228c	1^{6}22338a	1^{6}228888	1^{6}2348bc	1^{6}2889bc
1^{9}222	1^{7}22223	1^{7}23459	1^{6}222333	1^{6}22338c	1^{6}228889	1^{6}238888	1^{6}289999
1^{9}223	1^{7}22229	1^{7}23499	1^{6}222334	1^{6}223456	1^{6}22888a	1^{6}238889	1^{6}28999a
1^{9}22b	1^{7}22233	1^{7}2349a	1^{6}222338	1^{6}223458	1^{6}228899	1^{6}23888a	1^{6}2899aa
1^{9}234	1^{7}22234	1^{7}2349c	1^{6}22233b	1^{6}22345a	1^{6}22889a	1^{6}238899	1^{6}2899ab
1^{9}23b	1^{7}22239	1^{7}23999	1^{6}222345	1^{6}223488	1^{6}22889c	1^{6}23889a	1^{6}2899ac
1^{9}2bb	1^{7}2223c	1^{7}2399a	1^{6}222348	1^{6}223489	1^{6}2288aa	1^{6}23889c	1^{6}289aaa
1^{9}2bc	1^{7}22299	1^{7}2399b	1^{6}22234b	1^{6}22348a	1^{6}2288ab	1^{6}2388aa	1^{6}289aab
1^{8}2222	1^{7}2229a	1^{7}239ab	1^{6}222388	1^{6}22348c	1^{6}2288ac	1^{6}2388ab	1^{6}289abb
1^{8}2223	1^{7}2229c	1^{7}239bb	1^{6}222389	1^{6}2234aa	1^{6}2289aa	1^{6}2388ac	1^{6}289abc
1^{8}222a	1^{7}22334	1^{7}239bc	1^{6}22238b	1^{6}2234ab	1^{6}2288ab	1^{6}2389aa	1^{5}2222333
1^{8}2233	1^{7}22339	1^{7}29999	1^{6}22238c	1^{6}2234ac	1^{6}2289ac	1^{6}2389ab	1^{5}2222334
1^{8}2234	1^{7}22345	1^{7}2999a	1^{6}2223bb	1^{6}223888	1^{6}228aaa	1^{6}2389ac	1^{5}2222337
1^{8}223a	1^{7}22349	1^{7}299aa	1^{6}2223bc	1^{6}223889	1^{6}228aab	1^{6}238aaa	1^{5}222233b
1^{8}223c	1^{7}2234b	1^{7}299ab	1^{6}222888	1^{6}22388a	1^{6}228abb	1^{6}238aab	1^{5}2223345
1^{8}22aa	1^{7}22399	1^{7}299ac	1^{6}222889	1^{6}22388b	1^{6}228abc	1^{6}238abb	1^{5}2223347
1^{8}22ab	1^{7}2239a	1^{7}29aaa	1^{6}22288b	1^{6}22389a	1^{6}234567	1^{6}238abc	1^{5}222234b
1^{8}22ac	1^{7}2239b	1^{7}29aab	1^{6}22289a	1^{6}22389b	1^{6}234568	1^{6}288888	1^{5}222237b
1^{8}2345	1^{7}2239c	1^{7}29abb	1^{6}22289b	1^{6}2238aa	1^{6}234588	1^{6}288889	1^{5}22223bb
1^{8}234a	1^{7}223bb	1^{7}29abc	1^{6}2228bb	1^{6}2238ab	1^{6}234589	1^{6}288899	1^{5}22223bc
1^{8}23aa	1^{7}223bc	1^{6}222223	1^{6}2228bc	1^{6}2238ac	1^{6}23458c	1^{6}28889a	1^{5}2223334
1^{8}23ab	1^{7}22999	1^{6}222233	1^{6}223344	1^{6}2238bb	1^{6}234888	1^{6}28889c	1^{5}2223337
1^{8}23ac	1^{7}2299a	1^{6}222234	1^{6}223345	1^{6}2238bc	1^{6}234889	1^{6}288999	1^{5}2223344

$1^5\,2223345$	$1^5\,2227789$	$1^5\,2234599$	$1^5\,2237999$	$1^5\,2278999$	$1^5\,2347_{abb}$	$1^5\,277789_{a}$
$1^5\,2223347$	$1^5\,222778_{a}$	$1^5\,223459_{a}$	$1^5\,223799_{a}$	$1^5\,227899_{a}$	$1^5\,2347_{abc}$	$1^5\,277789_{b}$
$1^5\,222334_{a}$	$1^5\,222778_{c}$	$1^5\,223459_{c}$	$1^5\,223799_{b}$	$1^5\,227899_{b}$	$1^5\,2377778$	$1^5\,27778_{bb}$
$1^5\,222334_{c}$	$1^5\,22277_{aa}$	$1^5\,2234777$	$1^5\,22379_{aa}$	$1^5\,22789_{ab}$	$1^5\,2377779$	$1^5\,27778_{bc}$
$1^5\,2223377$	$1^5\,22277_{ab}$	$1^5\,2234778$	$1^5\,22379_{ab}$	$1^5\,22789_{bb}$	$1^5\,2377788$	$1^5\,2778889$
$1^5\,2223378$	$1^5\,22277_{ac}$	$1^5\,2234779$	$1^5\,22379_{ac}$	$1^5\,22789_{bc}$	$1^5\,2377789$	$1^5\,277888_{a}$
$1^5\,222337_{a}$	$1^5\,222789_{a}$	$1^5\,223477_{b}$	$1^5\,22379_{bb}$	$1^5\,2279999$	$1^5\,237778_{c}$	$1^5\,2778899$
$1^5\,222337_{c}$	$1^5\,22278_{aa}$	$1^5\,2234789$	$1^5\,22379_{bc}$	$1^5\,227999_{a}$	$1^5\,2377799$	$1^5\,277889_{a}$
$1^5\,22233_{aa}$	$1^5\,22278_{ab}$	$1^5\,223478_{b}$	$1^5\,2237_{aaa}$	$1^5\,22799_{aa}$	$1^5\,237779_{a}$	$1^5\,277889_{c}$
$1^5\,22233_{ab}$	$1^5\,22278_{ac}$	$1^5\,2234799$	$1^5\,2237_{aab}$	$1^5\,22799_{ab}$	$1^5\,237779_{c}$	$1^5\,27788_{aa}$
$1^5\,22233_{ac}$	$1^5\,2227_{aaa}$	$1^5\,223479_{a}$	$1^5\,2237_{abb}$	$1^5\,22799_{ac}$	$1^5\,2377889$	$1^5\,27788_{ab}$
$1^5\,2223456$	$1^5\,2227_{aab}$	$1^5\,223479_{b}$	$1^5\,2237_{abc}$	$1^5\,2279_{aaa}$	$1^5\,2377899$	$1^5\,27788_{ac}$
$1^5\,2223457$	$1^5\,2227_{abb}$	$1^5\,223479_{c}$	$1^5\,2239999$	$1^5\,2279_{aab}$	$1^5\,237789_{a}$	$1^5\,27789_{aa}$
$1^5\,222345_{a}$	$1^5\,2227_{abc}$	$1^5\,22347_{bb}$	$1^5\,223999_{a}$	$1^5\,2279_{abb}$	$1^5\,237789_{b}$	$1^5\,27789_{ab}$
$1^5\,2223477$	$1^5\,2233445$	$1^5\,22347_{bc}$	$1^5\,22399_{aa}$	$1^5\,2279_{abc}$	$1^5\,237789_{c}$	$1^5\,27789_{ac}$
$1^5\,2223478$	$1^5\,2233447$	$1^5\,2234999$	$1^5\,22399_{ab}$	$1^5\,2345677$	$1^5\,23778_{bb}$	$1^5\,2778_{aaa}$
$1^5\,222347_{a}$	$1^5\,2233456$	$1^5\,223499_{a}$	$1^5\,22399_{ac}$	$1^5\,2345678$	$1^5\,23778_{bc}$	$1^5\,2778_{aab}$
$1^5\,222347_{c}$	$1^5\,2233457$	$1^5\,223499_{b}$	$1^5\,2239_{aaa}$	$1^5\,234567_{c}$	$1^5\,2377999$	$1^5\,2778_{abb}$
$1^5\,22234_{aa}$	$1^5\,223345_{b}$	$1^5\,22349_{ab}$	$1^5\,2239_{aab}$	$1^5\,2345777$	$1^5\,237799_{a}$	$1^5\,2778_{abc}$
$1^5\,22234_{ab}$	$1^5\,2233477$	$1^5\,22349_{bb}$	$1^5\,2239_{abb}$	$1^5\,2345778$	$1^5\,237799_{b}$	$1^5\,2788899$
$1^5\,22234_{ac}$	$1^5\,2233478$	$1^5\,22349_{bc}$	$1^5\,2239_{abc}$	$1^5\,234577_{b}$	$1^5\,23779_{ab}$	$1^5\,278889_{a}$
$1^5\,2223777$	$1^5\,2233479$	$1^5\,2237777$	$1^5\,2277778$	$1^5\,2345789$	$1^5\,23779_{bb}$	$1^5\,278889_{c}$
$1^5\,2223778$	$1^5\,223347_{b}$	$1^5\,2237778$	$1^5\,2277788$	$1^5\,234578_{b}$	$1^5\,23779_{bc}$	$1^5\,2788999$
$1^5\,222377_{a}$	$1^5\,223347_{c}$	$1^5\,2237779$	$1^5\,2277789$	$1^5\,23457_{bb}$	$1^5\,2378999$	$1^5\,278899_{a}$
$1^5\,222377_{b}$	$1^5\,22334_{bb}$	$1^5\,223777_{a}$	$1^5\,227778_{c}$	$1^5\,23457_{bc}$	$1^5\,237899_{a}$	$1^5\,278899_{b}$
$1^5\,2223789$	$1^5\,22334_{bc}$	$1^5\,2237788$	$1^5\,2277799$	$1^5\,2347777$	$1^5\,237899_{b}$	$1^5\,27889_{ab}$
$1^5\,222378_{a}$	$1^5\,2233777$	$1^5\,2237789$	$1^5\,227779_{a}$	$1^5\,2347778$	$1^5\,23789_{ab}$	$1^5\,27889_{bb}$
$1^5\,222378_{b}$	$1^5\,2233778$	$1^5\,223778_{a}$	$1^5\,227779_{c}$	$1^5\,234777_{a}$	$1^5\,23789_{bb}$	$1^5\,27889_{bc}$
$1^5\,22237_{aa}$	$1^5\,2233779$	$1^5\,223778_{c}$	$1^5\,2277889$	$1^5\,2347788$	$1^5\,23789_{bc}$	$1^5\,2789999$
$1^5\,22237_{ab}$	$1^5\,223377_{b}$	$1^5\,2237799$	$1^5\,2277899$	$1^5\,2347789$	$1^5\,2379999$	$1^5\,278999_{a}$
$1^5\,22237_{ac}$	$1^5\,2233789$	$1^5\,223779_{a}$	$1^5\,227789_{a}$	$1^5\,234778_{a}$	$1^5\,237999_{a}$	$1^5\,27899_{aa}$
$1^5\,22237_{bb}$	$1^5\,223378_{b}$	$1^5\,223779_{c}$	$1^5\,227789_{b}$	$1^5\,234778_{c}$	$1^5\,23799_{aa}$	$1^5\,27899_{ab}$
$1^5\,22237_{bc}$	$1^5\,223379_{b}$	$1^5\,22377_{aa}$	$1^5\,227789_{c}$	$1^5\,23477_{aa}$	$1^5\,23799_{ab}$	$1^5\,27899_{ac}$
$1^5\,2223_{aaa}$	$1^5\,22337_{bb}$	$1^5\,22377_{ab}$	$1^5\,22778_{bb}$	$1^5\,23477_{ab}$	$1^5\,23799_{ac}$	$1^5\,2789_{aaa}$
$1^5\,2223_{aab}$	$1^5\,22337_{bc}$	$1^5\,22377_{ac}$	$1^5\,22778_{bc}$	$1^5\,23477_{ac}$	$1^5\,2379_{aaa}$	$1^5\,2789_{aab}$
$1^5\,2223_{abb}$	$1^5\,2234567$	$1^5\,2237899$	$1^5\,2277999$	$1^5\,234789_{a}$	$1^5\,2379_{aab}$	$1^5\,2789_{abb}$
$1^5\,2223_{abc}$	$1^5\,2234569$	$1^5\,223789_{a}$	$1^5\,227799_{a}$	$1^5\,23478_{aa}$	$1^5\,2379_{abb}$	$1^5\,2789_{abc}$
$1^5\,2227777$	$1^5\,2234577$	$1^5\,223789_{c}$	$1^5\,227799_{b}$	$1^5\,23478_{ab}$	$1^5\,2379_{abc}$	
$1^5\,2227778$	$1^5\,2234578$	$1^5\,22378_{aa}$	$1^5\,22779_{ab}$	$1^5\,23478_{ac}$	$1^5\,2777888$	
$1^5\,222777_{a}$	$1^5\,2234579$	$1^5\,22378_{ab}$	$1^5\,22779_{bb}$	$1^5\,2347_{aaa}$	$1^5\,2777889$	
$1^5\,2227788$	$1^5\,223457_{c}$	$1^5\,22378_{ac}$	$1^5\,22779_{bc}$	$1^5\,2347_{aab}$	$1^5\,277788_{b}$	