

序列和谐图的冠状扩充^{*}

邓毅雄

(基础课部)

摘 要 本文引入了图的冠状扩充概念,讨论了序列和谐图的冠状扩充,得到了一个扩充定理.

关键词 图;序列和谐图;和谐图;冠状扩充

分类号 O 157.5

0 引 言

本文仅讨论简单无向图,未加定义的术语参阅文献[1,2].

对图 $G = (V, E)$, 其中 V, E 分别是 G 的点集与边集.

设 A, B 是两整数集, 且 $|A| = |B|$, 若集 A 的各元素模整数 k 后恰好是集 B , 则记 $A = B(\bmod k)$.

定义1 若存在单射

$$h(v): V \longrightarrow \{0, 1, \dots, |E| - 1\},$$

使得导出映射 $\omega_{uv} = h(u) + h(v) \ (uv \in E)$ 是双射, 且 $\{w(uv) \mid uv \in E\} = \{0, 1, \dots, |E| - 1\} \bmod |E|$, 则称图 G 是和谐图, $h(v)$ 称为点 v 的和谐标号, $w(uv)$ 称为边 uv 的和谐值.

定义2 若对和谐图 G , 存在和谐标号 h 及正整数 k , 使得和谐值之集

$$\{\omega_{uv} \mid uv \in E\} = \{k, k+1, \dots, k+|E|-1\},$$

则称 G 为序列和谐图, 相应的 $h(v)$ 称为点 v 的序列标号.

和谐标号是图论的一类重要标号, 但目前寻找和谐图的方法往往是直接给出标号, 而这对较复杂的图是困难的. 又由于至今不能序列标号的和谐图未能找到^[2], 所以我们考虑在现有序列和谐图上扩充得到新的序列和谐图是具有一定意义的, 在文献[3]中, 作者讨论了序列和谐图的一种联式扩充, 本文拟考虑其所谓的冠状扩充, 因为冠图的和谐性备受这方面研究者的关注, 所以我们的工作将有助于这方面问题的探讨.

定义3 在图 G 的某些点上分别邻接若干条悬挂边, 图 G 的这种扩充称为冠状扩充. 若 $A \subseteq V$, 在 A 中各点上分别邻接 t 个悬挂点所得到的图记为 $G_A \odot tK_1$. 当 $A = V$ 时, $G_V \odot tK_1$ 称为

G 的 t -冠图, 简记为 $G \odot_t K_1$.

1 扩充定理

设 M, N 为两数集, 且 $|N| = t |M|$, 对 M 中任一数, 在 N 中不重复地取 t 个不同数与之相加得到一组数, 当取遍 M 中所有数时, 所得到的和值的全体之集记为 $M + N_t$, 如下我们仅考虑 $M \cdot N$ 为非负整数集, 且 $M \cap N = \emptyset$.

设 r_1, r_2, m, t 是非负整数, $M_1 = \{0, 1, \dots, 2r_1\}$, $M_2 = \{1, 3, \dots, 2r_2 - 1\}$, 而 $M = M_1 \cup M_2$. 这里我们取 $N = \{a_{2i,j} \mid 0 \leq i \leq r_1, 1 \leq j \leq t\} \cup \{b_{2i-1,j} \mid 1 \leq i \leq r_2, 1 \leq j \leq t\}$, 其中

(1) 当 $r_1 \geq r_2$ 时,

$$a_{2i,j} = m + (j-1)(r_1+1) - i \quad (0 \leq i \leq r_1, 1 \leq j \leq t);$$

$$b_{2i-1,j} = m + t(r_1+1) + (j-1)r_2 - i \quad (0 \leq i \leq r_2, 1 \leq j \leq t).$$

(2) 当 $r_1 < r_2$ 时,

$$b_{2i-1,j} = m + (j-1)r_2 - i \quad (1 \leq i \leq r_2, 1 \leq j \leq t);$$

$$a_{2i,j} = m + tr_2 + (j-1)(r_1+1) - i \quad (0 \leq i \leq r_1, 1 \leq j \leq t).$$

而 $M + N_t = \{a_{2i,j} + 2i \mid 0 \leq i \leq r_1, 1 \leq j \leq t\} \cup \{b_{2i-1,j} + (2i-1) \mid 1 \leq i \leq r_2, 1 \leq j \leq t\}$.

引理 M, N 中各数互不相同, 且 $M + N_t = \{m, m+1, \dots, m+t(r_1+r_2+1)-1\}$.

证明 显然 M 中各数互不相同. 设 $R_j = \{a_{2i,j} \mid 1 \leq i \leq r_1\}$, $T_j = \{b_{2i-1,j} \mid 1 \leq i \leq r_2\}$ ($1 \leq j \leq t$).

当 $r_1 \geq r_2$ 时, 由于 $\max R_j = a_{0,j} = m + (j-1)(r_1+1)$, $\min R_{j+1} = a_{2r_1,j+1} = m + j(r_1+1) - r_1 = \max R_j + 1$, 所以 $\bigcup_{j=1}^t R_j$ 中各数互不相同, 类似可证 $\bigcup_{j=1}^t T_j$ 中各数互不相同. 且 $N = (\bigcup_{j=1}^t R_j) \cup (\bigcup_{j=1}^t T_j)$, $\max \bigcup_{j=1}^t R_j = a_{0,t} = m + (t-1)(r_1+1) = m + t(r_1+1) - r_1 - 1 < m + t(r_1+1) - r_2 = b_{2r_2-1,1} = \min \bigcup_{j=1}^t T_j$, 所以 N 中各数互不相等. 由此也有 $|M| = r_1 + r_2 + 1$, $|N| = t(r_1 + r_2 + 1)$, 即 $|N| = t |M|$.

下面考虑 $M + N_t$. 设 $S_j = \{a_{2i,j} + 2i \mid 0 \leq i \leq r_1\} = \{m + (j-1)(r_1+1) + i \mid 0 \leq i \leq r_1\}$, $S_j' = \{b_{2i-1,j} + (2i-1) \mid 1 \leq i \leq r_2\} = \{m + t(r_1+1)(j-1)r_2 + i - 1 \mid 1 \leq i \leq r_2\}$ ($1 \leq j \leq t$), 由于 S_j, S_j' 中各元素互不相同, 且 $\max S_j = m + (j-1)(r_1+1) + r_1$, $\min S_{j+1} = m + j(r_1+1) = \max S_j + 1$, 及 $\min \bigcup_{j=1}^t S_j = \min S_1 = m$, $\max \bigcup_{j=1}^t S_j = \max S_t = m + t(r_1+1) - 1$, 所以 $\bigcup_{j=1}^t S_j = \{m, m+1, \dots, m+t(r_1+1)-1\}$. 同理可证 $\bigcup_{j=1}^t S_j' = \{m + t(r_1+1), m + t(r_1+1) + 1, \dots, m + t(r_1+r_2+1) - 1\}$. 从而 $M + N_t = \bigcup_{j=1}^t (S_j \cup S_j') = \{m, m+1, \dots, m + t(r_1+r_2+1) - 1\}$.

当 $r_1 < r_2$ 时, 类似可证结论成立.

利用上面引理, 下面我们可以证明冠状扩充定理.

定理 设 G 是序列和谐图, h 为其序列标号, 且 $h(v): V \longrightarrow \{0, 1, \dots, Q \mid Q \leq |E| - 1\}$,

$\{w(uv) \mid uv \in E\} = \{k, k+1, \dots, k+|E|-1\}$, $A_s = \{v \mid \forall i \in M_s, \exists v \in V, \text{使 } h(v) = i\}$ $s = 1, 2$, $A = A_1 \cup A_2$, 则当

(1) $r_1 \geq r_2, k+|E|-r_1 > Q$ 且 $k \leq r_2$;

或(2) $r_1 < r_2, k+|E|-r_2 > Q$ 且 $k \leq r_1$ 时, 图 $G_A \odot_t K_1$ 是序列和谐图.

证明 设 $u_{2i,j}$ ($0 \leq i \leq r_1, 1 \leq j \leq t$) 表示在 $G_A \odot_t K_1$ 中与标号 h 下标号为 $2i$ 的点邻接的第 j 个悬挂点, 而 $v_{2i-1,j}$ ($1 \leq i \leq r_2, 1 \leq j \leq t$) 表示与标号为 $2i-1$ 的点邻接的第 j 个悬挂点. 取 $m = k+|E|$, 我们如下给 $G_A \odot_t K_1$ 各点进行标号 h' :

当 $v \in V(G)$ 时, $h'(v) = h(v)$;

$h'(u_{2i,j}) = a_{2i,j}, h'(v_{2i-1,j}) = b_{2i-1,j}$.

下面验证 h' 是 $G_A \odot_t K_1$ 的序列标号.

(1) 当 $r_1 \geq r_2, k+|E|-r_1 > Q$ 且 $k \leq r_2$ 时, 由于 $\min N = m - r_1 = k+|E|-r_1 > Q$, 这说明在 h' 下, $u_{2i,j}$ 与 $v_{2i-1,j}$ 各点标号与 $v \in V(G)$ 的标号不相同, 又由引理及 $\max N = m + t(r_1+1) + (t-1)r_2 - 1 = k+|E| + t(r_1+r_2+1) - r_2 - 1 \leq |E| + t(r_1+r_2+1) - 1$, 所以 $h': V(G_A \odot_t K_1) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, |E| + t(r_1+r_2+1) - 1\}$, 而 $|E(G_A \odot_t K_1)| = |E| + t(r_1+r_2+1)$. 另一方面, 再由引理及 h' 标号法知, h' 的导出映射 $w'(uv) = h'(u) + h'(v)$. ($uv \in E(G_A \odot_t K_1)$) 是双射, 且 $\{w'(uv) \mid uv \in E(G_A \odot_t K_1)\} = \{h'(u) + h'(v) \mid uv \in E(G)\} \cup (M+N_t) = \{k, k+1, \dots, k+|E| + t(r_1+r_2+1) - 1\}$. 因此 h' 是序列标号, $G_A \odot_t K_1$ 是序列和谐图.

完全类似地可以证明(2)的情形.

2 几个推论

T. Grace 在文献[4]中证明了当 n 为奇数时, 王冠图 $C_n \odot K_1$ 是和谐图, 其证明方法是直接给出图的标号. 在这里我们利用定理容易得到.

推论 1 当 n 为奇数时, $C_n \odot_t K_1$ 是序列和谐图.

由于星图 $K_{1,n-1}$ 是序列和谐图, 其标号 h 为: 给中心点标号 n , 其它各点分别标号 $0, 1, \dots, n-1$. (注: 和谐树的标号 $h: V \rightarrow \{0, 1, \dots, |E|\}$, 容易验证: 取 $A = V(K_{1,n-1})$ 时, 满足定理条件, 于是有

推论 2 $K_{1,n-1} \odot_t K_1$ 是序列和谐图.

我们称在 $K_{1,n-1}$ 的各悬挂点上分别邻接 t 个悬挂点所得到的图为花星图. 当取 A 为 $K_{1,n-1}$ 的除中心点外的所有点, 同样易于验证满足定理条件, 于是得

推论 3 花星图是序列和谐图.

最后, 类似可得

推论 4 设 P_n 是第为 $n-1$ 的道路, 则 $P_n^2 \odot_t K_1$ 是序列和谐图.

推论 5 设 P 是 Petersen 图, 则 $P \odot_t K_1$ 是序列和谐图.

参 考 文 献

- 1 Bondy J A, Murty U S R. Graph Theorg With Applications, London: Macmillan Press Ltd. 1976
- 2 Gallian J A. A Survey: Recent Results, Conjectures, and Open Problems in Labelling Graphs. J. G T, 1989, (4) 491~504
- 3 邓毅雄. 序列和谐图及其扩充. 华东交通大学学报, 1995, 12(4): 79~83
- 4 Grace T. On Sequential Labelling of Graphs. J. G. T. 1983(7): 159~201

The Crown Extension of Sequential Harmonious Graphs

Deng Yixiong

(Department of Basic Courses)

Abstract This paper introduced the concept called crown extension of sequential harmonious graphs, and got a theorem of crown extension

Key words Graph; Sequential harmonious graph; Harmonious graph; Grown extension