

工程反分析问题及其应用

雷晓燕

(土木工程系)

摘要 本文综述了工程上常用的三种反分析方法:直接法、逆解法和对偶边界法,介绍了每种方法的原理和计算步骤. 计算结果显示,对偶边界法具有较高的分析精度. 在待识别参数较少的情况下,三种方法给出了同样的结果. 但在待识别参数较多的情况下,直接法和逆解法精度较差,在某些情况下甚至不收敛.

关键词 反分析;直接法;逆解法;对偶边界法

分类号 TB12

0 引言

在岩土工程中,充分了解工程的地质性质是十分重要的,为了掌握工程的地质性质,通常的作法是进行现场试验,再辅助于理论分析,综合两方面的数据即可获得所需的结果. 对于已知某些数据,例如位移,应力和速度(这些数据可通过实验得到),寻求所研究问题的材料性质,类似于这样的问题称为反分析问题. 反分析是对应于一般意义下已知问题的材料性质和外力求位移、应力这种正常分析而言的.

工程反分析问题包含的范围很广. 在讨论它的分类以前,先来看看一般意义下的正分析. 如图1. 求解一个问题的未知量 Φ 必须具备以下条件:(1)给定的区域 Ω 及相应的边界 Γ ;(2)给定问题的控制方程;(3)未知变量和相应各阶导数的边界条件或初始条件;(4)外荷载;(5)材料系数.

如果上述条件缺少任何一个,正分析则无法进行. 反分析是在某些附加条件下反求上述条件中的部分量. 根据所求量的不同,反分析可分为:(1)区域反分析;(2)控制方程反分析;(3)边界条件或初始条件反分析;(4)外荷载反分析;(5)材料参数反分析.

由于岩土工程中的问题常常涉及非均匀介质,材料性质在大多数情况下也是未知的. 因此,反分析方法在岩土工程中起着重要的作用. 根据岩土工程问题的特点,材料性质的识别是反分析中的重点.

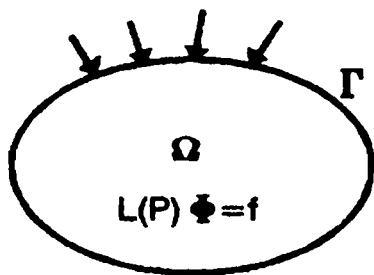


图1 正分析问题

目前,材料性质反分析共有三类,分别是直接法,逆解法和对偶边界法。

1 直接法

直接法具有如下三个特点:一是材料参数隐式地包含在有限元方程中;二是误差函数为测量位移与计算位移的泛函;三是在反分析过程中必须求解有限元方程。

(1) 误差函数取为

$$w = (u - \bar{u})^T (u - \bar{u}) / 2, \quad (1)$$

其中, u 为计算值, $\bar{u}$ 为测量值。

利用 Taylor 级数, 可将第 $k+1$ 次迭代时的误差函数用第 k 次迭代已知值表示成

$$w(p^{k+1}) = w(p^k) + \left(\frac{\partial w}{\partial p} \right)^k dp^k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2} \right)^k (dp^k)^2, \quad (2)$$

令 $w(p^{k+1}) \rightarrow \min$, 即由 $\frac{\partial w}{\partial (dp^k)} = 0$ 则得到

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial p^2} \right)^k dp^k = - \left(\frac{\partial w}{\partial p} \right)^k. \quad (3)$$

利用(1)式可得

$$\frac{\partial w}{\partial p} = \left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)^T (u - \bar{u}), \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial p^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)^T \frac{\partial u}{\partial p}. \quad (5)$$

其中, 在推导(5)式时, 用到了 $\frac{\partial^2 u}{\partial p^2} = 0$, 这是因为求解 u 的 FEM 的方程是用一阶 Taylor 近似式。

将(4)、(5)式代入(3)式中, 得到求解 dp^k 的第 $k+1$ 次迭代方程为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_k^T \left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_k dp^k = \left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_k^T (\bar{u} - u). \quad (6)$$

(2) 有限元方程

$$k(p)u = F \quad (7)$$

上式两边对 p 求导, 则有

$$\left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_k = -k^{-1} \left(\frac{\partial k}{\partial p} u \right)_k. \quad (8)$$

(3) 计算步骤 选择初值 p^0

(a) 由(7)式求得位移 u ;

(b) 根据(8)式计算 $\left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)$;

(c) 由(6)式计算 dp^k ;

(d) 计算 $p^{k+1} = p^k + dp^k$; $u^{k+1} = u^k + du^k$. 判别计算是否收敛 $\frac{\|p^{k+1} - p^k\|}{\|p^{k+1}\|} \leq \epsilon$, 若

收敛, 计算结束; 否则转步骤(a)。

2 逆解法

逆解法由 Cividini, Jurina 等^[1]首次提出, 该方法具有如下三个特点: 一是材料参数显式

地表示在 FEM 方程中;二是误差函数基于最小二乘法;三是不需要求解有限元方程.

在弹性力学问题中,弹性矩阵可表示为

$$D = BD_B + GD_G. \quad (9)$$

其中, B 为体积模量; G 为剪切模量; D_B, D_G 为已知的系数矩阵.

有限元方程可写成

$$(BK^B + GK^G)u = F. \quad (10)$$

其中, $u = \{u_1, u_2\}^T$, u_1 为测量值, u_2 为未知量.

将(10)式写成分块形式,则有

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}, \quad (11)$$

从上述方程第2式解出 u_2 , 回代到第1式, 得到

$$(k_{11} - k_{12}k_{22}^{-1}k_{21})u_1 = F_1 - k_{12}k_{22}^{-1}F_2, \quad (12)$$

其中 $k_{ij} = Bk_{ij}^B + Gk_{ij}^G$, $(i, j = 1, 2)$

将 $k_{11} = Bk_{11}^B + Gk_{11}^G$, $k_{21} = Bk_{21}^B + Gk_{21}^G$ 代入(12)式中, 则得到如下形式的方程

$$Vp = F_1 - CF_2 \quad (13)$$

其中: $V = [(k_{11}^B - Ck_{21}^B)u_1(k_{11}^G - Ck_{21}^G)u_1]$; $p = \{B G\}^T$; $C = k_{12}k_{22}^{-1}$.

利用最小二乘法建立误差函数

$$w = \frac{1}{2}(VP - F_1 + CF_2)^T(Vp - F_1 + CF_2) \rightarrow \min. \quad (14)$$

由 $\frac{dw}{dp} = V^T(Vp - F_1 + CF_2) = 0$

得到 $V^TVp = V^T(F_1 - CF_2)$.

逆解法求解步骤如下

(1) 选择初值 p^0 ;

(2) 计算 V, C ;

(3) 根据(15)式计算 p^1 .

$\vdots$

第 i 次计算格式为 $(V^TV)_i p^{i+1} = \{V^T(F_1 - CF_2)\}_i$.

(4) 判别计算是否收敛 $\frac{\|p^{i+1} - p^i\|}{\|p^{i+1}\|} \leq \epsilon$.

3 对偶边界解法

考察区域为 Ω 边界为 Γ 的弹性问题, 如图2所示. 边界 Γ 又可分为给定位移的边界 Γ_u 和给定面力的边界 Γ_σ 两部分.

对于线弹性问题, 控制方程为

$$\nabla \cdot \sigma = 0 \quad \text{in } \Omega \subset R^n \quad (n = 1, 2, 3) \quad (16)$$

边界条件:

$$u = \hat{u} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (17)$$

$$\sigma n = \hat{t} \quad \text{on } \Gamma_\sigma \quad (18)$$

其中, σ 为应力张量; u 为位移矢量; n 为边界外法线矢量.

$$\text{物理方程} \quad \sigma = D\varepsilon \quad (19)$$

$$\text{其中:} \quad \varepsilon = [(\nabla u) + (\nabla u)^T]/2. \quad (20)$$

在对偶边界解法中, 为了识别材料参数 p (p 为弹性模量 E 和泊松比 μ), 采用如下办法: 在边界 Γ_u 上施加一给定位移 $\bar{u}$, 同时观察 Γ_u (Γ_u 为 Γ_u 的子域) 上对应的面力 $\bar{i}$; 或者反过来, 在边界 Γ_u 上施加一给定面力 $\bar{i}$, 同时观察 Γ_u (Γ_u 为 Γ_u 的子域) 上对应的位移 $\bar{u}$, 如图 2 所示. 上述条件可表示为

$$u = \bar{u} \quad \text{on} \quad \Gamma_u \subset \Gamma_u \quad (21)$$

$$\sigma n = \bar{i} \quad \text{on} \quad \Gamma_u \subset \Gamma_u \quad (22)$$

利用上述附加条件, 即可建立识别材料参数 p 的方程.

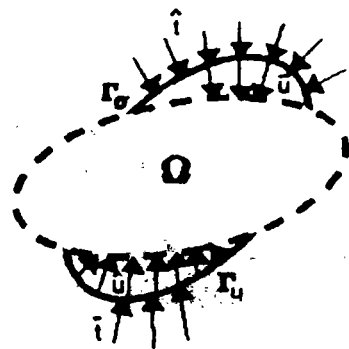


图 2 对偶边界法解反分析问题

(16) 式至(18)式等价于下列虚功方程

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \partial \varepsilon d\Omega - \int_{\Gamma_u} \bar{i} \bar{u} d\Gamma = 0, \quad (23)$$

引入插值函数, 可将域内任一点的位移用结点位移表示成

$$u = Na. \quad (24)$$

将上式代入(23)式, 并利用物理方程, 则得到有限元方程如下

$$K(p)a = F, \quad (25)$$

$$\text{其中:} \quad K = \int_{\Omega} B^T D(p) B d\Omega; \quad F = \int_{\Gamma_u} N^T \bar{i} d\Gamma.$$

(21) 式和(22) 式用矩阵表示如下

$$S_u a = \bar{a}, \quad (26)$$

$$S_i F = \int_{\Gamma_u} N^T \bar{i} d\Gamma = \bar{F}. \quad (27)$$

其中, S_u 和 S_i 为对角矩阵. 例如, 当第 i 个结点为位移观察值, 第 j 个结点为面力观察值时, 则

$$\text{有} \quad S_u = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & \ddots & & \ddots \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{第 } i \text{ 行}, \quad S_i = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & \ddots & & \ddots \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{第 } j \text{ 行}.$$

式(25) 可改写为

$$\Psi = k(p)a - F \neq 0 \quad (28)$$

利用 Taylor 级数, 可将第 $k+1$ 次迭代时的误差函数用第 k 次迭代时的已知值表示为

$$\Psi^{k+1} = \Psi^k + K da^k - IdF^k + \left(\frac{\partial K}{\partial p} a \right)^k dp^k. \quad (29)$$

令 $\Psi^{k+1} = 0$, 得到

$$K(p^k) da^k - IdF^k + \left(\frac{\partial K}{\partial p} a \right)^k dp^k = F^k - K(p^k) a^k \quad (30)$$

同理可将(26)、(27) 式写成迭代格式

$$S_u da^k = \bar{a} - S_u a^k \quad (31)$$

$$S_i dF^k = \bar{F} - S_i F^k \quad (32)$$

将(30)~(32)式合写在一起, 得到

$$Gdx = R \quad (33)$$

其中:

$$G = \begin{bmatrix} K(p^k) & -I & \left(\frac{\partial K}{\partial p} a\right)^k \\ S_s & 0 & 0 \\ 0 & S_i & 0 \end{bmatrix}, \quad dx = \begin{Bmatrix} da^k \\ dF^k \\ dp^k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a^{k+1} - a^k \\ F^{k+1} - F^k \\ p^{k+1} - p^k \end{Bmatrix}, \quad R = \begin{Bmatrix} F^k - K(p^k)a^k \\ \bar{a} - S_s a^k \\ \bar{F} - S_i F^k \end{Bmatrix}$$

由于(33)式是一超定线性方程组, 我们改求如下形式的普通方程组

$$G^T G dx = G^T R \quad (34)$$

上式即为对偶边界法识别材料参数 p 的迭代方程.

在迭代步 k 中, 引入线性搜索法. 为此定义

$$w(p) = \frac{1-\omega}{2}(a-\bar{a})^T(a-\bar{a}) + \frac{\omega}{2}(F-\bar{F})^T(F-\bar{F}) - \frac{1}{\epsilon}E^- - \frac{1}{\epsilon}u^- + \frac{1}{\epsilon}(\nu-0.5)^+ \quad (35)$$

其中: $0 \leq \omega \leq 1$ 为给定的常数; $0 < \epsilon \ll 1$ 为罚常数.

(35) 式中的最后三项是为了使 $E > 0$, $0 < \nu < 0.5$. E^- , ν^- 和 $(\nu-0.5)^+$ 定义如下

$$a^- = \begin{cases} a & a > 0, \\ 0 & a < 0. \end{cases} \quad a^- = \begin{cases} 0 & a > 0, \\ a & a < 0. \end{cases} \quad (36)$$

$$\text{再引入 } \alpha^k \quad \alpha^k = dp^k/p^k, \quad (37)$$

$$\text{问题转化成寻求 } \lambda, \text{ 使} \quad w(p^k + \lambda \alpha^k) \rightarrow \min \quad (38)$$

采用线性搜索法, 将 w 近似表示成

$$w(p^k + \lambda \alpha^k) = w(p^k) + \left(\frac{dw}{dp}\right)^k \lambda \alpha^k + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2w}{dp^2}\right)^k \lambda^2 (\alpha^k)^T (\alpha^k). \quad (39)$$

$$\text{由 } \frac{dw}{d\lambda} = 0, \text{ 得到} \quad \lambda = - \frac{\left(\frac{dw}{dp}\right)^k \alpha^k}{\left(\frac{d^2w}{dp^2}\right)^k (\alpha^k)^T \alpha^k}, \quad (40)$$

其中, $\left(\frac{dw}{dp}\right)^k, \left(\frac{d^2w}{dp^2}\right)^k$ 可由(35)式计算得到

$$\begin{aligned} \left(\frac{dw}{dp}\right)^k &= (1-\omega) \left(a \frac{da}{dp} - \bar{a} \frac{da}{dp} \right)^k + \omega \left(F \frac{dF}{dp} - \bar{F} \frac{dF}{dp} \right)^k \\ &\quad - \frac{1}{\epsilon} \frac{dE}{dp} - \frac{1}{\epsilon} \frac{d\nu}{dp} + \frac{1}{\epsilon} \frac{d(\nu-0.5)^-}{dp} \end{aligned} \quad (41)$$

$$\left(\frac{d^2w}{dp^2}\right)^k = (1-\omega) \left(\frac{da}{dp} \cdot \frac{da}{dp} \right)^k + \omega \left(\frac{dF}{dp} \cdot \frac{dF}{dp} \right)^k \quad (42)$$

上式中, $\left(\frac{da}{dp}\right)^k$ 可通过求解(34)式得到.

一旦获得了 $\lambda \alpha^k$, 即可求得 p^{k+1}

$$p^{k+1} = p^k + \lambda \alpha^k \quad (43)$$

对偶边界法的收敛准则可选择为

$$\frac{\|a^{k+1} - a^k\|}{\|a^{k+1}\|} \leq \epsilon_1; \quad \frac{\|F^{k+1} - F^k\|}{\|F^{k+1}\|} \leq \epsilon_2; \quad \frac{\|p^{k+1} - p^k\|}{\|p^{k+1}\|} \leq \epsilon_3, \quad (44)$$

其中, $0 < \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \ll 1$ 为给定的精度. (44) 式中的范数为平方范数 $\|a\| = (a \cdot a)^{1/2}$.

5 算 例

5.1 一维桁架问题

考察一维桁架问题, 如图 3 所示. 在结点 1 处施加一外力 $\hat{t} = 10^6 \text{N}$ (相当于边界 Γ_t), 同时在结点 1 处观测到位移 $\bar{a}_1 = 0.2 \text{m}$. 结点 3 为固定边界, 但力是未知的. 因此, 仅有边界条件 (21). 这时 $dF = 0$.

由 (30)、(31) 式可得

$$\begin{bmatrix} \frac{E}{l} & -\frac{E}{l} \\ -\frac{E}{l} & \frac{2E}{l} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} da_1^k \\ da_2^k \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & -\frac{1}{l} \\ -\frac{1}{l} & \frac{2}{l} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} a_1^k \\ a_2^k \end{Bmatrix} dE^k = \begin{Bmatrix} -\hat{t} \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{E}{l} & -\frac{E}{l} \\ -\frac{E}{l} & \frac{2E}{l} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} a_1^k \\ a_2^k \end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} da_1^k \\ da_2^k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{a}_1 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} a_1^k \\ a_2^k \end{Bmatrix},$$

其中, $l = 0.5 \text{m}$ 为单元的长度. 由于不计 (32) 式, 则有

$$G^T G = \begin{bmatrix} 2(E/l)^2 + 1 & -3(E/l)^2 & E/l^2(2a_1 - 3a_2) \\ -3(E/l)^2 & 5(E/l)^2 & E/l^2(-3a_1 + 5a_2) \\ E/l^2(2a_1 - 3a_2) & E/l^2(-3a_1 + 5a_2) & 1/l^2(2a_1^2 - 6a_1a_2 + 5a_2^2) \end{bmatrix}$$

$$G^T R = \begin{bmatrix} -\frac{E}{l}\hat{t} + (E/l)^2(-2a_1 + 3a_2) + \bar{a}_1 - a_1 \\ \frac{E}{l}\hat{t} + (E/l)^2(3a_1 - 5a_2) \\ -\frac{1}{l}\hat{t}(a_1 - a_2) - 1/l^2(2a_1^2 - 6a_1a_2 + 5a_2^2) \end{bmatrix}$$

上述各表达式中为了叙述简洁, 忽略上指标 k .

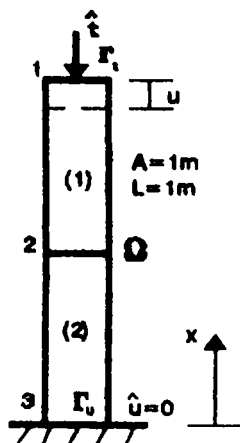


图 3 一维桁架问题

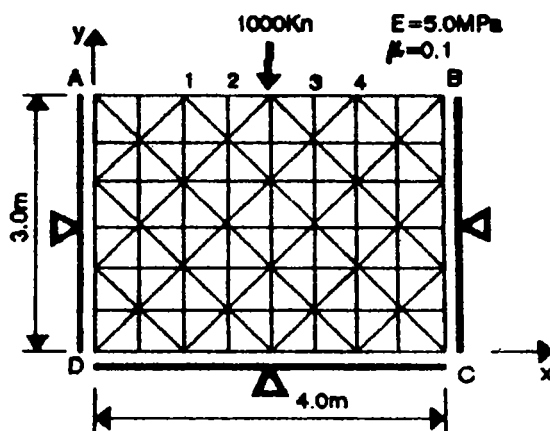


图 4 单层地基识别弹性模量

计算中,各初始值选择为
 $E^0 = 2.0\text{MPa}, a_1^0 = -0.5\text{m}, a_2^0 = -0.25\text{m}.$
(44) 式的收敛精度为 $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0.01.$

计算结果见表 1. 其中还给出了与直接解法和逆解法的比较. 在这个简单的例子中, 三种算法无明显的差别.

5.2 单层地基识别弹性模量

考察各向同性的弹性地基,如图 4 所示. 地基表面边界 AB 为面力边界 Γ_s , AB 的中央作用有一集中力 10^6N . 观测结点 1 到结点 4 的位移为

$$\begin{aligned} u_1 &= u_4 = 3.94\text{cm}, u_2 = u_3 = 5.15\text{cm}, \\ v_1 &= v_4 = -10.51\text{cm}, v_2 = v_3 = -18.76\text{cm}. \end{aligned}$$

同样采用两种方法识别弹性模量,计算结果见表 2.

5.3 单层地基弹性模量和泊松比的识别

计算模型同 5.2 中的问题,但是在这个例子中我们同时识别弹性模量和泊松比. 计算结果示于表 3. 其中直接解法指采用先识别 E ,待计算收敛后,再识别 μ . 在这个例子中,我们看到,逆解法和直接解法在达到最大迭代次数 20 次后,仍未收敛.

5.4 多层地基弹性模量和泊松比的识别

考察三层边坡开挖问题,需要分别确定各层的弹性模量和泊松比. 计算模型如图 5 所示. 在边界 4~6,作用有因开挖而产生的分布荷载,同时观察到各点的位移为

$$\begin{aligned} v_1 &= -0.014\text{cm}, u_4 = 2.16\text{cm}, \\ v_4 &= 0.926\text{cm}, u_5 = 1.81\text{cm}, \\ v_5 &= 0.521\text{cm}, u_6 = 0.646\text{cm}, \\ v_6 &= 0.133\text{cm}, u_9 = 0.959\text{cm}, \\ v_9 &= 0.344\text{cm}. \end{aligned}$$

计算结果示于表 4. 从表中可以再一次看出,对偶边界法具有较好的精度.

表 1 一维桁架识别弹性模量

	初始值	真值	逆解法	直接法	对偶法
弹性模量 $E(\text{MPa})$	2.0	5.0	5.0	5.0	5.0
迭代次数			1	5	3

表 2 单层地基弹性模量的识别

	初始值	真值	逆解法	直接法	对偶法
弹性模量 $E(\text{MPa})$	2.0	5.0	5.0	5.0	5.0
迭代次数			2	3	3

表 3 单层地基弹性模量和泊松比的识别

	初始值	真值	逆解法	直接法	对偶法
弹性模量 $E(\text{MPa})$	2.0	5.0	4.077	5.056	5.0
泊松比 μ	0.2	0.1	0.280	0.102	0.1
迭代次数			20	20	3

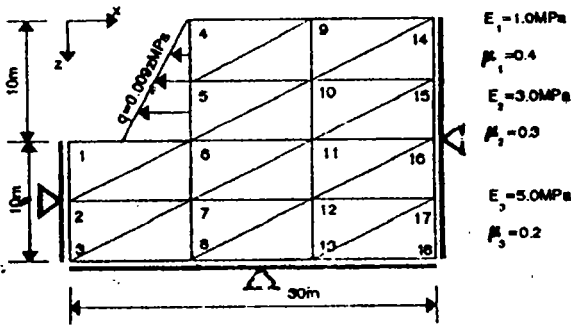


图 5 多层地基弹性模量和泊松比的识别

表 4 多层地基弹性模量和泊松比的识别

	初始值	真值	Arai et al.	对偶边界法
弹性模量 $E_1(\text{MPa})$	3.0	1.0	1.0	1.0
泊松比 μ_1	0.1	0.4	0.38	0.4
迭代次数			10	5
弹性模量 $E_2(\text{MPa})$	1.0	3.0	3.0	3.0
泊松比 μ_2	0.1	0.3	0.34	0.3
迭代次数			10	5
弹性模量 $E_3(\text{MPa})$	3.0	5.0	5.2	5.0
泊松比 μ_3	0.1	0.2	0.14	0.2
迭代次数			10	5

6 结 论

本文论述了工程上常用的三种反分析方法,即直接法、逆解法和对偶边界法.从给出的算例中可以看到,对偶边界法具有较高的分析精度.在待识别参数少的情况下,三种方法给出了同样的结果.由于直接法和逆解法算法简单,可考虑选择这两种方法.但在待识别参数较多的情况下,直接法和逆解法精度较差,在某些情况下甚至不收敛,这时宜选用对偶边界法.

参 考 文 献

- 1 Box M J Davis D, Swann, W H Nonlinear Optimization techniques. ICI Ltd., Monograph No: 5, Oliver and Boyd, Ltd., Edinburgh, 1969
- 2 Ichikawa Y. A Generalized Material Parameter Identification Procedure in Geotechnical Engineering. Impact of Computational Mechanics on Engineering Problems, Balkema, Rotterdam, 1993
- 3 Cividini A Jurina L, Gioda G. Some Aspects of Characterization Problem in Geomechanics. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr., 1981,18:487~503
- 4 Gioda G, Maier G. Direct Search Solution of an Inverse Problem in Elastoplasticity; Identification of Cohesion, Friction Angle and in situ Stress by Pressure Tunnel Tests, Int. J. Numer. Methods Eng., 1980,15:1823~1848
- 5 Ichkawa Y, Ohkami T. A Parameter Identification Procedure as a Dual Boundary Control Problem for Linear Elastic Materials. Soils and Foundations, 1992,32(2):35~44
- 6 Ichkawa Y, Kyoya T, Ohkami T, et al A Parameter Identification Procedure as a Dual Boundary Control concept for Wave-propagation Problem. Proc. IUYAM Symp. On Inverse Problems, Tokyo.
- 7 Kubo S. Inverse Problems, Baifukan Pr, 1992
- 8 Ohkami T, Ichkawa Y. A Parameter Identification Procedure as a Dual Boundary Control Problem for Viscoelastic Materials. Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech, 1993
- 9 Tsuchiyama S, Ohkami T, Ichkawa Y. Identification of Damage Tensor for Jointed Rock Mass and Deformation prediction during excavation of underground cavern. proc. JSCE, 1993

Engineering Back Analysis Problem and Applications

Lei Xiaoyan

(Civil Engineering Department)

Abstract This paper summarizes three commonly used back analysis methods in engineering, i. e. direct formulation, inverse formulation and dual boundary control formulation. The principles and computational steps for each method are given herein. The computation shows the dual boundary control formulation results in high accuracy. In the case of identifying fewer parameters, the three methods give the same results. However in the case of identifying more parameters, direct and inverse formulations perform worse and even diverge.

Key words back analysis; direct formulation; inverse formulation; dual boundary control formulation