

树的邻接向量与优美树猜想的微机证明*

周尚超

(基础课部)

摘 要 本文引入了树的邻接向量的概念,用微机证明阶数 ≤ 20 的树都是优美树.

关键词 图;树;向量;优美图;微型计算机

分类号 0157.5

0 引言

本文所指的图 $G=(V,E)$ 均为无向简单图. $V=V(G)$ 和 $E=E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集.一个图可用 m 阶矩阵来表示,但它使用了较多的数(m^2 个)表示一个 m 阶(有 m 个点的)图.本文引入了树的邻接向量的概念,它只用 m 个数就可表示 m 阶树,并且它较直观地反映了树的较多的信息.当用计算机来解决与树有关的问题时,它占用存储量小,易于编程计算.著名的优美树猜想已有30多年,被数十位数学工作者研究过,发表的文章上百篇,但至今只证明了其中的一小部分.按阶数来说,只证明阶数 ≤ 16 的树是优美的.17,18,19阶树的个数分别为48629,123867,317955,要证明阶数更大的是很困难的.我们用Pascal语言编程证明优美树猜想,证明了阶数 ≤ 20 的树是优美的.但阶数增大时,计算的时间将急剧增加.以18阶为例,在486微机上需费50多小时才能完成.

1 树的邻接向量

在下文中我们总是讨论有 n 条边的 $m(=n+1)$ 阶树.设 $A=(A(1),A(2),\dots,A(m))$ 是一个 m 维整数向量且满足: $A(1)=0;1\leq A(i)\leq i-1,i>1$;则称 A 是树的邻接向量,简称树向量.设 T 是 m 阶图, $V(T)=\{1,2,\dots,m\}$.称 i 是 T 的第 i 个点, i 点或编号为 i 的点.这里称“编号”是和以后的“标号”相区别. (i,j) 表示邻接 i 与 j 的边且总是把较小的写在左边,即 $i<j$. $E(T)=\{(i,j)|\text{如果 } A(j)=i\}$.定义 $A^0(i)=i,A^{t+1}(i)=A(A^t(i))$.按 $E(T)$ 的定义,对于任意点 $j(>1)$, j 与且仅与一编号比 j 小的点邻接,即 T 有 n 条边,且存在 k ,使 $A^k(j)=1,j-A(j)-A^2(j)-\dots-A^k(j)=1$ 是一条邻接 j 与1的路,这说明 T 是有 n 条边的 m 阶连通图, T 是树.称 A 是 T 的邻接向量或 T 可用 A 表示. T 的 n 条边是: $(1,2),(A(3),3),(A(4),4),$

$\dots, (A(m), m)$. 自然地, 我们把 $(A(j), j)$ 称为 T 的第 $j-1$ 条边. 以下把 A 与 T 等同看待, 即树 A 就是指 A 所表示的树.

定理 1 任何 m 阶树都可用 m 维树向量表示.

证明 设 T 是 m 阶树, 任取 T 的一个点作为第 1 点, 记 $A(1)=0$; 取 1 邻接的一个点为 2 点, 记 $A(2)=1$; T 是连通图, 在 $V(T)-\{1, 2\}$ 中一定有点与 1 或 2 邻接. 任取一个这样的点为 3 点, 如 3 与 1(2) 邻接, 则记 $A(3)=1(2)$. 在 $V(T)-\{1, 2, 3\}$ 中选一个与 $\{1, 2, 3\}$ 中的点邻接的点为 4 点, 若 4 与 $i(1 \leq i \leq 3)$ 邻接, 则记 $A(4)=i$, 如此下去, 就得到一个 m 维向量 A .

用 $D(i)$ 表示 A 的分量中等于 i 的个数, $\deg(i)$ 表示第 i 个点的度, 则有 $\deg(1)=D(1)$; $\deg(i)=D(i)+1, i>1; 1 \leq \deg(i) \leq m+1-i, i>1; 1 \leq \deg(1) \leq n; \deg(m)=1$.

定理 2 设 $A^k(i)=A^l(j)$, 且对任意 $k'<k, l'<l$ 都有 $A^{k'}(i) \neq A^{l'}(j)$ 及 $A^k(i) \neq A^l(j)$, 则 i 到 j 的距离为 $k+l$.

系 若 $A^k(j)=i$, 则 i 到 j 的距离为 k .

我们把树 A 看作一棵向上生长的树, 第一个点称为根, 祖先、第一代的点或第一水平上的点. 如 $A(j)=i$, 则称 i 是 j 的父母, j 是 i 的子女. 如果 $A(i)=A(j)$ 且 $i<j$, 则称 i 是 j 的哥哥, j 是 i 的弟弟. 第一代的点的子女称为第二代的点, 第二代的点的子女称为第三代的点, 依此类推.

m 维树向量有 $n!$ 个. $9! = 362880$, 而 10 阶树只有 106 个, 即平均每个 10 阶树有 3628 个树向量. 我们希望用满足某些特定条件的向量来表示树, 以减少表示树的向量, 便于用计算机进行计算.

设 T 是 m 阶树, 按定理 1 证明的方法可找出许多表示 T 的向量. 我们将 T 的点的编号法作如下改进. 取 T 的度最大的点为第 1 点, 与 1 邻接的 $D(1)$ 个点或 1 的 $D(1)$ 个子女编号为 $2, \dots, D(1)+1$ 且满足 $D(2) \geq D(3) \geq \dots \geq D(D(1)+1)$, 即子女多的点为哥哥(编号小). 当子女数相等时, 例如 $D(2)=D(3)=t$. 设 2 和 3 的 t 个子女的度分别为 $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_t$ 和 $j_1 \geq j_2 \geq \dots \geq j_t$, 如果 $i_1=j_1, i_2=j_2, \dots, i_k=j_k, i_{k+1} < j_{k+1}$, 则将编号为 2 和 3 的两点互换. 即子女多者为哥哥, 子女数相同时, 孙子多(按向量意义的多少)者为哥哥. 设第 1, 2 代共有 h 个点, 第 3 代共有 r 个点, 则将第 3 代的点编号为 $h+1, h+2, \dots, h+r$ 且满足 $A(h+p) \leq A(h+p+1)$, 如果 $A(h+p)=A(h+p+1)$, 则 $D(h+p) \geq D(h+p+1), p=1, 2, \dots, r-1$; 如果 $A(h+p) < A(h+p+1)$ 且 $D(h+p)=D(h+p+1)=t$, 则 $(i_1, i_2, \dots, i_t) \geq (j_1, j_2, \dots, j_t)$, 这里 $(i_1, i_2, \dots, i_t)$ 和 $(j_1, j_2, \dots, j_t)$ 分别是 $h+p$ 和 $h+p+1$ 的 t 个子女的度向量. 如此进行下去, 我们得到表示 T 的树向量 A , 它满足下述条件

条件 1 $A(i) \leq A(j), i < j$;

条件 2 $D(1) > D(i), i > 1$;

条件 3 如果 $A(i)=A(i+1)$, 则 $D(i) \geq D(i+1)$;

条件 4 如果 $A(i)=A(i+1), D(i)=D(i+1)=t, i$ 和 $i+1$ 的 t 个子女分别为 $i_1, i_2, \dots, i_t$ 和 $j_1, j_2, \dots, j_t$, 则 $(D(i_1), D(i_2), \dots, D(i_t)) \geq (D(j_1), D(j_2), \dots, D(j_t))$.

例 8 阶树共有 23 个. 满足 4 个条件的 8 维树向量共有 30 个. 树向量的第 1 个分量总是 0, 我们略去不写, 在不引起混淆时, 将向量 A 写作 $A(2)A(3)\dots A(m)$, 并用 1^k 表示 k 个 1. 表示 8 阶树的 30 个向量为: $1^7, 1^62, 1^522, 1^523, 1^527, 1^4222, 1^4223, 1^4226, 1^4234, 1^4236, 1^4266,$

$1^4267, 1^32233, 1^32234, 1^32235, 1^32237, 1^32255, 1^32256, 1^32257, 1^32345, 1^32355, 1^32356, 1^32357, 1^32556, 1^32566, 1^32567, 1^223456, 1^223457, 1^223467, 1^224567$. 最后4个是同构的, 即 $1^223456, \dots, 1^224567$ 这4个同构, 其它同构的还有 $1^22233 \cong 1^22255, 1^22234 \cong 1^22256, 1^22355 \cong 1^22556$. 互不同构的23个.

2 证明优美树猜想的计算机程序

若对图 G 的每个点 u 存在一个非负整数 $f(u)$ (称为 u 的标号), 满足条件: $f(u) \leq |E|$, 若 $u_1 \neq u_2$, 则 $f(u_1) \neq f(u_2)$; 任意两条边的标号不相同, 边 (u_1, u_2) 的标号是 $|f(u_1) - f(u_2)|$; 则称 G 是优美图, f 是 G 的优美标号. 对于树来说, 它的 m 个点的标号恰是 $0, 1, 2, \dots, n$; 边的标号是 $1, 2, \dots, n$.

猜想 任意树都是优美图.

在下文, 我们用 $B(i)$ 表示第 i 个点的标号, $L(i)$ 表示第 i 条边的标号, 前面提到第 $j-1$ 条边是 $(A(j), j)$, 故 $L(i) = |B(A(i+1)) - B(i+1)|$. $V_i = [B(1), B(2), \dots, B(i)]$ 表示前 i 个点的标号的集合. E_i 表示前 $i-1$ 条边的集合 $[L[1], L[2], \dots, L[i-1]]$. 设 B 是树 A 的一个优美标号且 $B(i) = 0$ 或 n , 则称第 i 点是零点或 i 点可用 0 标号. 经计算表明, 树的大多数点都可用 0 标号, 因此, 我们总是令 $B(1) = 0$, 以减少计算量.

证明 m 阶树是优美树的程序结构如下 (由计算机语言规定, $()$ 改用 $[]$, 下标与字母平行).

```

1.  A[1]:=0; A[2]:=1; A[3]:=1; F:=0;
2.  FOR A[4]:=A[3] TO 3 DO BEGIN
3.  FOR A[5]:=A[4] TO 4 DO BEGIN
      :
4.  FOR A[m]:=A[m-1] TO m-1 DO BEGIN
5.  FOR I:=1 TO n DO BEGIN FOR J:=I+1 TO m
6.  DO BEGIN IF A[J]=1 THEN D[I]:=D[I]+1; END;
7.  MAXD2:=MAX{D(2), D(3), ..., D(n)};
8.  IF D[1]<MAXD2 THEN GOTO AM;
9.  IF A[i]=A[i+1] AND D[i]<D[i+1] GOTO AM;
10. IF condition4=0 GO TO AM;
11. F:=F+1; B[1]:=0; G:=0; WRITELN(A);
12. FOR B[2]:=n DOWNT0 1 DO BEGIN
13. FOR B[3]:=n DOWNT0 1 DO BEGIN
14. IF B[3] IN V2 GOTO B3
15. IF L[2] IN E2 GOTO B3
      :
16. FOR B[m]:=n DOWNT0 1 DO BEGIN
17. IF B[m] IN Vn GOTO Bm;
18. IF L[n] IN En GOTO Bm;
19. G:=G+1; WRITELN(B); WRITELN(L);

```

20. GOTO AM, Bm, END; ... B2; END;

21. Am, END; ... A4; END;

从第1行到4行,程序将产生形为 $(0, 1, 1, A(4), \dots, A(m))$ 的所有向量,它满足 $A(i) \leq A(i+1) \leq i$. 第5行计算 $D(i)$, $D(1)$ 是第1点的度; $D(i)+1$ 是第 i 点的度, $i > 1$. 第7行计算第一点外的最大度. 第8行表示第1点的度不是最大时,就跳出标号的计算. 第9行表示当 A 不满足条件3时,就跳出标号的计算. 第10行是一个程序段的最末一行,该段判断 A ,如 A 不满足条件4,则 $\text{condition4}=0$,跳出标号的计算. 在第10行后,程序产生了一个满足4个条件的向量 A , F 表示 A 是第 F 个向量. 从第11行起,打印 A 并开始 A 进行标号,到第18行标号完毕,然后打印 B 和 L , G 表示这是第几棵优美树,如果某树 A 不是优美树,就会出现 $F \neq G$ 的情形. 在标号了一棵树后,由20行,转到下一个向量继续标号.

下面给出 $m=18, D(1)=3$ 的两棵树,点和边的标号, $A(1)$ 和 $B(1)$ 略去不写,第一行给出 A ,第2,3行给出 B 和 L .

1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	$F=1$
17	16	15	6	5	3	2	14	9	4	1	13	8	10	7	11	12	$G=1$
17	16	15	11	12	13	14	1	6	2	5	8	3	7	4	9	10	

1	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	9	$F=2$
17	16	15	6	5	3	14	8	1	11	10	13	2	12	9	4	7	$G=2$
17	16	15	11	12	13	2	7	14	5	4	8	3	9	6	10	1	

我们称度为最大度减1的点为次1度点,为最大度减2的点为次2度点,等等. 我们用486微机从 $m=7$ 证到 $m=19$. 如果树 T 的向量 $A=(1, 1, 2, 2, \dots, 2, 3, 3, \dots, 3)$,这种树用 $T(a, b)$ 表示它有 a 个2, b 个3, $A(2)=A(3)=1$. 图1中给出了图 $T(3, 2)$ 和 $T(4, 1)$. 我们证得如下结果.

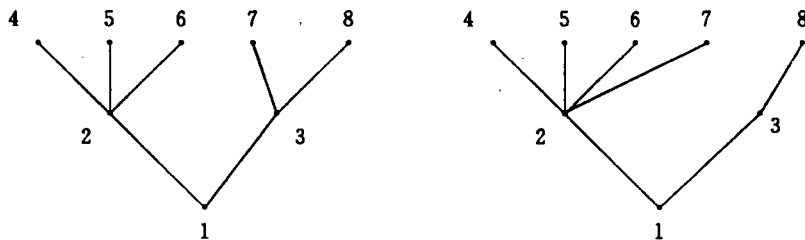


图1

定理3 设 $m \leq 17$,则每个 m 阶数都是优美的,且每个度 ≥ 3 的点都可用0标号,当 $m \leq 16$ 时,每个度2点只要不是 $T(a, b)$ 的第1点都可用0标号. 当 $m=17$ 时,每个度2点只要是次一度点和次2度点都可用0标号.

定理4 设 $m=18$ 或19,则每个 m 阶树都是优美的. 当 $m=18$ 时,每个度 ≥ 2 的点,只要它是最大度点或次一度点或次二度点,都可用0标号.

定理5 设 $m \leq 18$. 若 $m-1$ 是素数,则图 $T(a, b)$ 的第1点不可用0标号,其余不可用0标号的(度 ≥ 2)点还有下列图的第1点: $T(5, 2), T(7, 1), T(11, 1), T(9, 3), T(11, 2), T(9, 4), T(7, 6)$.

例 图1中的两个图的第1点不可用0标号.

当 $m \geq 17$ 时,得到的结果没有 $m \leq 16$ 的多,并非没有这些结果,而是需要很长时间才能完成,只好放弃一些. 当 $m = 20$ 时,用机器证明估计要 1.2 万小时,我们可用已证明的结果来证明.

对于优美图 G , 设 u 是 G 的 0 点, 即 u 可用 0 标号, 使得 G 为优美图. 在 u 点处可增加 t 条悬挂边(同时也增加了 t 个悬挂点), 扩充后的 G 仍为优美图, 且 u 仍为 0 点, 且增加的每个悬挂点都是 0 点. 我们将 G 的这种扩充称为 0 点生长. 这种扩充可不断进行下去, 即从 0 点处可生长出一棵毛毛虫树来.

设 A 满足前节的 4 个条件, 下同. 设 $2 \leq i \leq D(1)$. 把第 1 点, 第 i 点及第 i 点的所有后代生成的子图称为 A 的第 $i-1$ 个分支. 第 1 点属于每个分支, 使各分支边数之和恰好为 n .

定理 6 每个 20 阶树都是优美图.

证明 设 A 是 20 阶树 T 的向量. 设 $D(1) = 4$, A 有 19 条边, 4 个分支, 必有一个分支, 其边数 ≤ 4 . 若边数 ≥ 2 , 则将该分支去掉以后, 第 1 点是阶数 ≤ 18 的树的 3 度点, 由定理 3, 4, 它是 0 点, 由该点 0 点生长, 可得到 T . 若边数 = 1, 则在其余 3 个分支中必有一分支的边数 ≤ 6 . 若边为 2, 3, 4, 则类似前面证明. 若边数为 5, 6 且不能用 0 点生长, 则在某点处有向上的两个分枝, 每分支有 2 或 3 条边, 去掉一个分枝后, 某点为 18 阶(或 17 阶)树的次一度(或次 2 度)点, 是 0 点, 由该点 0 点生长而得. 对于其它情形, 都可类似证明.

参 考 文 献

- 1 Gallian J A. A Survey: Recent Results, Conjectures, and Open Problems in Labeling Graphs. J. Graph Theory 1989, 7: 491~504
- 2 马克杰. 优美图. 北京: 北京大学出版社, 1991

The Adjacency Vectors of Trees and the Conjecture of Graceful Trees

Zhou Shangchao

(Department of Basic courses)

Abstract The concept of the adjacency vectors of trees is introduced in the paper. Through computation, all trees of order $m (\leq 20)$ are proved graceful.

Key words graph; tree; vector; graceful graph; microcomputer