

关于反色数的若干注记

邓毅雄

(基础课部)

摘 要 证明文献[1]提出的关于反色数上界的猜想,得到了带宽与反色数有关的下界,并给出了几类图的反色数.

关键词 图;反色数;独立数;带宽

分类号 O157.5

0 引言

本文仅考虑简单图. n 表示图的阶数,文中未加定义的术语均参阅文献[2].

定义 1 对图 $G=(V, E)$, 如果 $V(G)$ 的划分 $V(G)=\bigcup_{i=1}^t V_i$, 满足

- (1) $V_i \cap V_j = \emptyset$; $(i \neq j; i, j=1, 2, \dots, t)$
- (2) $E(G[V_i]) = \emptyset$; $(i=1, 2, \dots, t)$
- (3) $E(G[V_i \cup V_j]) \neq \emptyset$. $(i \neq j; i, j=1, 2, \dots, t)$

则称 $\bigcup_{i=1}^t V_i$ 是 G 的一个 t ——色划分. 这里 $G[S]$ 表示 G 中 S 的导出子图.

定义 2 图 G 的反色数 $\bar{\chi}(G)$ 为

$$\bar{\chi}(G) = \max \{t; \bigcup_{i=1}^t V_i \text{ 是 } G \text{ 的一个 } t\text{——色划分}\}.$$

文献[1]对反色数进行了讨论,得到几类图的反色数及反色数的界,最后提出了一个关于其上界的猜想. 本文首先对该猜想进行了证明,然后,给出了有关反色数的带宽下界及几类图的反色数.

下面我们先引出本文将用到的文献[1]的若干结果.

引理 1^[1] 对任意 n 阶图 G , $\{(\bar{\chi}(G)-1)/\Delta(G)\} \bar{\chi}(G) \leq n$.

引理 2^[1] 对任意 n 圈 C_n .

$$\bar{\chi}(C_n) = \begin{cases} 2k, & n = 2k^2 + k + 1 \\ 2k + 1, & n = 2k^2 + k \text{ 或 } 2k^2 + k + 2 \leq n \leq 2k^2 + 4k + 1 \\ 2k + 2, & 2k^2 + 4k + 2 \leq n \leq 2k^2 + 5k + 2 \end{cases} \\ (k = 1, 2, 3, \dots)$$

引理 3^[1] 对任意路 P_n .

$$\bar{\chi}(P_n) = \begin{cases} 2k+1, & 2k^2+k+1 \leq n \leq 2k^2+4k+1 \\ 2k+2, & 2k^2+4k+2 \leq n \leq 2k^2+5k+3 \end{cases} \quad (k=0,1,2,\dots)$$

文献[1]提出的猜想为:对任意 n 阶图 G , $\bar{\chi}(G) \leq n - \beta + 1$. 其中 $\beta = \beta(G)$ 为 G 的独立数.

1 猜想的证明

为了证明上述猜想,我们先给出一个显然的结论:

引理 4 对任意图 G , $\bar{\chi}(G-u) + 1 \geq \bar{\chi}(G)$, 其中 $u \in V(G)$.

下面通过对图 G 的阶数进行归纳来证明猜想.

显然,当 $n=1,2$ 时,结论成立.

假设对一切阶数小于 n 的图,结论均成立. 设 G 是任意 n 阶图, $\forall u \in V(G)$, $N(u) = \{v \mid uv \in E(G), v \in V(G)\}$ 是 u 在 G 中的邻域. 对 $n-1$ 阶图 $G' = G - u$, 设 $t = \bar{\chi}(G')$, $c': v \rightarrow \{1, 2, \dots, t\}$ ($v \in V(G')$) 是 G' 的一个 t -色划分, 对应 $V(G') = \bigcup_{j=1}^t V_j$, 记 $B = \{c'(v) \mid v \in N(u)\}$, $C = \{1, 2, \dots, t\}$, $A = C - B$.

情形 1 当对 G' 的任一 t -色划分 c' 均有 $A \neq \emptyset$ 时, 则 $\forall i \in A$, 在上述 G' 色划分的基础上, 在 G 中给点 u 着色 i 是可行的. 而且 u 的着色必在 A 中, 否则, 显然 u 的着色不能在 B 中, 故 u 只能用 C 外的一正整数着色. 不妨设为 $t+1$, 而这必导致 $\forall j \in A$, 有 $E(G[\{u\} \cup V_j]) = \emptyset$, 与定义 1(3) 矛盾. 由此并结合 G' 划分的最大性, 必有 $\bar{\chi}(G) = \bar{\chi}(G')$. 由归纳假设及 $\beta(G) \leq \beta(G') + 1$, 则

$$\bar{\chi}(G) = \bar{\chi}(G') \leq (n-1) - \beta(G') + 1 = n - (\beta(G') + 1) + 1 \leq n - \beta(G) + 1.$$

情形 2 当存在 G' 的某 t -色划分 c' 使 $A = \emptyset$ 时, 下面分两情形讨论.

情形 2.1 若 G' 的任一最大独立集 S , 均有 $N(u) \cap S \neq \emptyset$ 时, S 也是 G 的最大独立集, 从而 $\beta(G) = \beta(G')$. 由引理 4 及归纳假设

$$\bar{\chi}(G) \leq \bar{\chi}(G') + 1 \leq [(n-1) - \beta(G') + 1] + 1 = n - \beta(G) + 1.$$

情形 2.2 若存在 G' 的某最大独立集 S , 使 $N(u) \cap S = \emptyset$ 时, $\{u\} \cup S$ 不仅是 G 的独立集, 而且是最大独立集, 从而 $\beta(G) = \beta(G') + 1$.

由归纳假设, $\bar{\chi}(G') \leq (n-1) - \beta(G') + 1 = n - \beta(G')$. 当 $\bar{\chi}(G') < n - \beta(G')$ 时, 因为 $\bar{\chi}(G) \leq \bar{\chi}(G') + 1$ 及 $\bar{\chi}(G)$, $\bar{\chi}(G')$, $\beta(G)$ 与 $\beta(G')$ 均为整数, 则

$$\bar{\chi}(G) \leq \bar{\chi}(G') + 1 < n - \beta(G') + 1 \leq n - (\beta(G') + 1) + 1 = n - \beta(G) + 1.$$

而当 $\bar{\chi}(G') = n - \beta(G')$ 时, 由于 $N(u) \cap S = \emptyset$, 那么 G' 的阶数 $n-1 \geq |N(u)| + \beta(G') \geq \bar{\chi}(G') + \beta(G') = n$, 矛盾.

综上所述, 猜想成立, 从而有

定理 1 对任意 n 阶图 G , $\bar{\chi}(G) \leq n - \beta(G) + 1$.

定理 1 的上界是可达的, 这只要考虑图 $K_{1, n-1}$ 等即可.

2 有关反色数的带宽下界

目前,国内学者对带宽的研究十分活跃,象文献[3],获得了带宽与诸多图的不变量有关的下界.本文利用引理1与定理1,获得了与反色数有关的带宽下界.

设双射 $f:V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ 是 G 的一个标号,而最大标号差

$$B(G, f) = \max_{uv \in E(G)} |f(u) - f(v)|,$$

称为 G 在标号 f 下的带宽,图 G 的带宽定义为

$$B(G) = \min_f B(G, f).$$

设 φ 为图的不变量,若 G 为 H 的生成子图,导致 $\varphi(G) \leq \varphi(H)$,则称 φ 为递增不变量,否则若导致 $\varphi(G) \geq \varphi(H)$,则称 φ 为递减不变量.文献[3]的定理2给出了一个确定带宽下界的有效方法:

(1) 当 φ 递增时, $B(G) \geq \min\{k: \varphi(G) \leq \varphi(P_n^k)\}$;

(2) 当 φ 递减时, $B(G) \geq \min\{k: \varphi(G) \geq \varphi(P_n^k)\}$.

显然反色数 $\bar{\chi}(G)$ 是递增的,那么我们有

定理2 若 $B(G)$ 、 $\bar{\chi}(G)$ 分别为 n 阶图 G 的带宽与反色数,则

(1) $B(G) \geq \{(\bar{\chi}(G) - 1)/(n - \bar{\chi}(G) + 1)\}$;

(2) $B(G) \geq \{\bar{\chi}(G)(\bar{\chi}(G) - 1)/2n\}$.

证明 不难验证, $\beta(P_n^k) = \lfloor \frac{n-1}{k+1} \rfloor + 1 \geq \frac{n-1}{k+1} - \frac{k}{k+1} + 1 = \frac{n}{k+1}$, $\Delta(P_n^k) \leq 2k$,

(1) 由定理1, $\bar{\chi}(P_n^k) \leq n - \beta(P_n^k) + 1 \leq n - \frac{n}{k+1} + 1 = \frac{nk}{k+1} + 1$, 则

$$\begin{aligned} B(G) &\geq \min\{k: \bar{\chi}(G) \leq \bar{\chi}(P_n^k)\} \geq \min\{k: \bar{\chi}(G) \leq \frac{nk}{k+1} + 1\} \\ &= \min\{k: k \geq (\bar{\chi}(G) - 1)/(n - \bar{\chi}(G) + 1)\} = \{(\bar{\chi}(G) - 1)/(n - \bar{\chi}(G) + 1)\}. \end{aligned}$$

(2) 由引理1知

$$n \geq \{(\bar{\chi}(P_n^k) - 1)/\Delta(P_n^k)\} \bar{\chi}(P_n^k) \geq \{(\bar{\chi}(P_n^k) - 1)/2k\} \bar{\chi}(P_n^k) \geq (\bar{\chi}(P_n^k) - 1) \bar{\chi}(P_n^k)/2k,$$

则 $\bar{\chi}(P_n^k) \leq (1 + \sqrt{1 + 8kn})/2$.

所以 $B(G) \geq \min\{k: \bar{\chi}(G) \leq \bar{\chi}(P_n^k)\} \geq \min\{k: \bar{\chi}(G) \leq (1 + \sqrt{1 + 8kn})/2\}$
 $= \min\{k: k \geq \bar{\chi}(G)(\bar{\chi}(G) - 1)/2n\} = \{\bar{\chi}(G)(\bar{\chi}(G) - 1)/2n\}.$

当然,我们注意到,上面两个下界在反色数较大时比较精确,反之较弱.

推论1 对 n 阶图 G

$$B(G) \geq \max\{(\bar{\chi}(G) - 1)/(n - \bar{\chi}(G) + 1), \{\bar{\chi}(G)(\bar{\chi}(G) - 1)/2n\}\}.$$

3 几类图的反色数

下面我们通过给出联图的反色数定理,得出几类图的反色数.

定理3 设 G, H 是两个点不相交的图,则 $\bar{\chi}(G+H) = \bar{\chi}(G) + \bar{\chi}(H)$.

证明 设 $\bar{\chi}(G)=s, \bar{\chi}(H)=t, V(G)=\bigcup_{i=1}^s A_i$ 与 $V(H)=\bigcup_{j=1}^t B_j$ 分别是 G 与 H 的色划分, 则显然 $V(G+H)=(\bigcup_{i=1}^s A_i) \cup (\bigcup_{j=1}^t B_j)$ 是 $G+H$ 的一个 $s+t$ ——色划分, 所以, $\bar{\chi}(G+H) \geq s+t$.

另一方面, 若 $\bar{\chi}(G+H) \geq s+t+1$, 设 $\bar{\chi}(G+H)=s+t+r$ ($r \geq 1$), 由 $G+H$ 的构造知, 在 $G+H$ 的任一色划分中, G 与 H 中任一点的着色必不相同. 所以 $G+H$ 的色划分必形如 $V(G+H)=(\bigcup_{i=1}^m A_i) \cup (\bigcup_{j=1}^l B_j)$, 其中 $A_i \subset V(G), B_j \subset V(H)$, 且 $m+l=s+t+r$. 从而导致 $V(G)=\bigcup_{i=1}^m A_i, V(H)=\bigcup_{j=1}^l B_j$ 分别是 G 与 H 的色划分, 并且或者 $m \geq s+1$, 或者 $l \geq t+1$ 中至少一个成立, 而这与 $\bar{\chi}(G)=s$ 或 $\bar{\chi}(H)=t$ 矛盾.

综上有 $\bar{\chi}(G+H)=\bar{\chi}(G)+\bar{\chi}(H)$.

由定理 3, 当 $H=\bar{K}_m$, 有

推论 2 对任意图 $G, \bar{\chi}(G+\bar{K}_m)=\bar{\chi}(G)+1$.

推论 2 告诉我们, 当某图 G 存在独立集 S , 使 S 中各点均与 $G-S$ 中每点邻接时, 则求 G 的反色数可以转化为求 $G-S$ 的反色数. 如象完全图 K_n , 完全 m 部图 $K_{r_1, r_2, \dots, r_m}$ 等的反色数均可由此方法轻易得到, 利用引理 2, 3 及推论 2, 有

推论 3

$$\bar{\chi}(C_n + \bar{K}_m) = \begin{cases} 2k+1, & n=2k^2+k+1 \\ 2k+2, & n=2k^2+k \text{ 或 } 2k^2+k+2 \leq n \leq 2k^2+4k+1 \\ 2k+3, & 2k^2+4k+2 \leq n \leq 2k^2+5k+2 \\ & (k=1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

当 $m=1$ 时, $C_n + \bar{K}_m$ 为轮图. 所以推论 3 也可以看成文献[1]中定理 7 的一种推广.

推论 4

$$\bar{\chi}(P_n + \bar{K}_m) = \begin{cases} 2k+2, & 2k^2+k+1 \leq n \leq 2k^2+4k+1 \\ 2k+3, & 2k^2+4k+2 \leq n \leq 2k^2+5k+3 \\ & (k=0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

另外, 图 $B(n, r, m)$ 是具有一个公共 K_r 的 m 个 K_n 构成的图. 由于 $B(n, n-1, m)=K_{n-1} + \bar{K}_m$, 及 $\bar{\chi}(K_{n-1})=n-1$, 则

推论 5 $\bar{\chi}(B(n, n-1, m))=n$.

最后, 设 $G=qK_2$, 由于在 G 的任一划分 $V(G)=\bigcup_{i=1}^i V_i$ 中, 要求 $E(G[V_i \cup V_j]) \neq \emptyset$ ($i \neq j; i, j=1, 2, \dots, i$), 所以 $q \geq \left\lceil \frac{\bar{\chi}(G)}{2} \right\rceil = (\bar{\chi}(G)-1)\bar{\chi}(G)/2$, 故 $\bar{\chi}(G) \leq [(1+\sqrt{1+8q})/2]$. 由于较容易具体找到 qK_2 的一个 $[(1+\sqrt{1+8q})/2]$ ——色划分, 所以有

定理 4 $\bar{\chi}(qK_2)=[(1+\sqrt{1+8q})/2]$.

推论 6 $\bar{\chi}(qK_2 + \bar{K}_m)=[(1+\sqrt{1+8q})/2]+1$.

当 $m=1$ 时, 图 $qK_2 + K_1=B(3, 1, q)$ 被称为法国风车, 由此我们获得了法国风车的反色数.

(下转第 76 页)

$\leq \{n/2m\}$.

另一方面, $X_m(K_n) = S$, 由 m -色数定义 $V(K_n) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_m$, $r(K_n[V_i]) = r(K_{|V_i|}) = \left\{ \frac{|V_i|}{2} \right\} \leq m$, 故 $|V_i| \leq 2m$, 因此 $S \geq \frac{n}{2m}$, 由于 S 为整数, 故 $S \geq \left\{ \frac{n}{2m} \right\}$. 定理 4 证毕.

注: 由于任何图的 m -色数不小于其子图的 m -色数, 因此, 对任意 P 阶图 G , $X_m(G) \leq \left\{ \frac{P}{2m} \right\}$, ($m \geq 1$), $X_m(G) + X_m(\bar{G}) \leq 2 \cdot \left\{ \frac{P}{2m} \right\}$, 这是图与补图的 m -色数之和的又一平凡的上界. 此界不如定理 2 所给出的界限好. 例如考虑 100 阶图与其补图的 3-色数之和 S , 由此界得 $S \leq 34$, 但由定理 2 知 $S \leq 26$, 因此, 反映图与补图的 m -色数最好关系是定理 2.

参 考 文 献

- 1 哈拉里 F. 图论. 上海: 上海科技出版社, 1980
- 2 张忠辅, 王建方. 图与补图的荫度. 曲阜师范大学学报, 1990(2): 11~13
- 3 徐保根. 图与补图的线荫度. 华东交通大学学报, 1994(1): 80~84

Generalized Chromatic Number of a Graph and its Complementary Graph

Xu Baoggen

(Department of Basic Courses)

Abstract The concept of generalized chromatic number of graphs, Called m -chromatic number, is introduced in this paper. The relation between a graph and its complementary graph is studied and the m -chromatic numbers in some particular graphs are discussed.

Key words graph; m -chromatic number; vertex-arboricity; edge-arboricity

(上接第 72 页)

参 考 文 献

- 1 Xin zhong Lu, Jincang Han and Zhong fu zhang. On the reciprocal chromatic number of graphs. Pure and Applied Mathematic, 1994(Special Issue), 204~209
- 2 Boudy J A and Murty U S R. Graph Theory with Applications. North-Holland, New York, 1976
- 3 周三明. 图的带宽的若干新下界. 太原机械学院学报, 1994 (Supplement), 24~31

The Notes of Reciprocal Chromatic Number of Graphs

Deng Yixiong

(Department of Basic Courses)

Abstract A conjecture raised by [1] is proved in this paper. The lower bound of bandwidth about the reciprocal chromatic number is derived and the reciprocal chromatic number of some graphs is given as well.

Key words graph; reciprocal chromatic number; independent number; bandwidth