

图与补图的一种广义色数*

徐保根

(基础课部)

摘要 引进了图的一种广义色数—— m -色数的概念,探讨了图与其补图的 m -色数关系,并考虑了几类特殊图的 m -色数.

关键词 图; m -色数;点荫度;线荫度

分类号 O157. 5

0 引言

本文所指的图均为无向简单图,文中未说明的符号、术语同于文献[1].

图的着色理论是图论中的十分活跃的重要课题,随着其理论的逐步完善与丰实,其应用也越来越广泛.除了点着色、边着色之外,还有点边着色(全着色)、边面全着色和点边面着色(完备着色)等概念.各种色数都在一定程度上得到了研究.然而,各种色数都可以向着图的某些特征性质方面进行推广,使得图的这些性质特征得到更多的了解.就图的点色数来说,我们可以作如下推广:设 P 为图的某一特征性质

图 G 的 P -色数可以定义为

$$X_P(G) = \min\{n | V(G) = \dot{\bigcup}_{i=1}^n V_i, G[V_i] \text{ 具有性质 } P\},$$
其中 $G[V_i]$ 表示 V_i 在 G 中的导出子图.

本文将结合图的荫度来推广图的点着色概念,定义一种图的 m -色数.

图的线荫度记为 $r(G)$,其定义为将图 G 分解成生成林时生成林的最少数目(参见文献[1]).特殊地,若 G 为空图(无边图),记 $r(G) = 0$.

引理 1^[1] 令 G 为一个非平凡的 (p, q) 图, q_n 是 G 的任何一个 n 阶子图中线的最数目.则 $r(G) = \max_n \{q_n / (n - 1)\}$,其中 $\{x\}$ 表示不小于 x 的最小整数.

图 G 的点荫度记为 $a(G)$,其定义为^[2] $a(G) = \min\{n | V(G) = \dot{\bigcup}_{i=1}^n V_i, G[V_i] \text{ 为无圈图 } 1 \leq i \leq n\}$

定义 设 m 为非负整数,图 G 的 m -色数记为 $X_m(G)$,其定义为

$$X_m(G) = \min\{n | V(G) = \bigcup_{i=1}^n V_i, r(G[V_i]) \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

其中 $G[V_i]$ 表示 V_i 在 G 中的导出子图.

按上述定义不难看出: $X_0(G) = X(G)$ 为图的点色数; $X_1(G) = a(G)$ 是图的点荫度. 因此, 图的 m -色数是点色数和点荫度的自然推广. 当 $m \geq r(G)$ 时, $X_m(G) = 1$, 即 $r(G) = \min\{m | X_m(G) = 1\}$.

图与补图的点色数关系 $X(G) + X(\bar{G}) \leq 1 + |V(G)|$ 是众所周知的; 文献[3]研究了图与补图的线荫度关系; 文献[2]研究了图与补图的点荫度, 并提出猜想: 对任意 P 阶简单图 G , 均有 $a(G) + a(\bar{G}) \leq 1 + \{P/2\}$. 为了证实并推广这一猜想, 本文研究了图与补图的 m -色数关系.

1 图与补图的 m -色数

图 G 的最小度记为 $\delta(G)$. 图 G 的极大最小度记为 $\delta_M(G)$, 其定义为 $\delta_M(G) = \max\{\delta(H) | H \subseteq G\}$.

定理 1 若 G 为任意一个简单图. 且 $X_m(G) = n$, 则 $\delta_M(G) \geq (m+1)(n-1)$

证 令 $R = \{H \subseteq G | X_m(H) = n\}$, 由于 $G \in R$, 故 $R \neq \emptyset$, 取 H_0 为 R 中阶数最小的一个图. 下证 $\delta(H_0) \geq (m+1)(n-1)$ 即可. $n=1$ 时显然, 下设 $n \geq 2$.

(反证) 若 $\delta(H_0) \leq (m+1)(n-1) - 1$, 设 v_0 是图 H_0 中一个最小度点, 即 $d_{H_0}(v_0) = \delta(H_0)$, 由定义可见:

$X_m(H_0 - v_0) = n - 1$, 记 $G_0 = H_0 - v_0$, $V(G_0) = \bigcup_{i=1}^{n-1} V_i$, 且使 $V_i \cap V_j = \emptyset$, $(i \neq j)$, $r(G_0[V_i]) \leq m$. 又因为 $d_{H_0}(v_0) \leq (m+1)(n-1) - 1$, 故至少存在某个 V_j 使得在 H_0 中 v_0 点至多与 V_j 中的 m 个点邻接. 下证图 $H_1 = H_0[V_j \cup v_0]$ 的线荫度 $r(H_1) \leq m$ 事实上, 由于 $r(H_1 - v_0) = r(H_0[V_j]) \leq m$, 对于 $V(H_1)$ 的任意子集 S 在 H_1 中的导出子图 G^1 , (不妨设 $|S| \geq 2$).

若 $v_0 \notin S$, 则 $|E(G^1)| / (|S| - 1) \leq r(H_1 - v_0) \leq m$.

若 $v_0 \in S$, 则有

$$\frac{|E(G^1)|}{|S| - 1} = \frac{|E(G^1 - v_0)| + d_{G^1}(v_0)}{|S| - 1} \leq \frac{m(|S| - 2) + m}{|S| - 1} = m.$$

由 S 的任意性及引理 1 得知 $r(H_1) \leq m$.

考虑 $V(H_0) = V(G_0) \cup \{v_0\}$ 的一种划分如下:

$$V(H_0) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{j-1} \cup (V_j \cup \{v_0\}) \cup V_{j+1} \cup \dots \cup V_{n-1}.$$

由上述 $r(H_0[V_i]) = r(G_0[V_i]) \leq m$ ($1 \leq i \leq n-1, i \neq j$).

且已证 $r(H_0[V_j \cup \{v_0\}]) = r(H_1) \leq m$, 由 m -色数定义知 $X_m(H_0) \leq n-1$. 这与 $X_m(H_0) = n$ 矛盾 ($H_0 \in R$). 定理 1 证毕.

由上述定理可直接得出简单的

推论 1 对任意 P 阶简单图 G , $\Delta(G)$ 表示 G 的最大度, 则 $X_m(G) \leq 1 + [\Delta(G)/(m+1)]$.

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

推论 2 对任意简单图 G , 均有

$$X(G) \leq \delta_m(G) + 1 \leq \Delta(G) + 1$$

定理2 对任意简单图 G , 均有

$$X_m(G) + X_m(\bar{G}) \leq 2 + [(p-1)/(m+1)].$$

其中 $\bar{G}$ 为 G 的补图. $[x]$ 为不超过 x 的最大整数.

证设 $X_m(G) = n_1, X_m(\bar{G}) = n_2$, 由定理1知 $\delta_m(G) \geq (m+1)(n_1-1), \delta_m(\bar{G}) \geq (m+1)(n_2-1)$, 即存在 G 的子图 H_1 和 $\bar{G}$ 的子图 H_2 , 使得 $\delta(H_1) \geq (m+1)(n_1-1), \delta(H_2) \geq (m+1)(n_2-1)$.

(1) 若 $V(H_1) \cap V(H_2) = \emptyset$; 则有

$$P \geq |V(H_1)| + |V(H_2)| \geq \delta(H_1) + 1 + \delta(H_2) + 1 \geq (m+1)(n_1+n_2-2) + 2$$

即 $n_1 + n_2 \leq 2 + (P-2)/(m+1) < 2 + (P-1)/(m+1)$;

由于 n_1 和 n_2 均为整数, 故 $n_1 + n_2 \leq 2 + [(P-1)/(m+1)]$.

(2) 若 $V(H_1) \cap V(H_2) = S \neq \emptyset$; 则任取 $v \in S$ 有

$$d_G(v) \geq d_{H_1}(v) \geq \delta(H_1) \geq (m+1)(n_1-1),$$

$$d_{\bar{G}}(v) \geq d_{H_2}(v) \geq \delta(H_2) \geq (m+1)(n_2-1).$$

以上两式的两端分别相加得

$$P-1 = d_G(v) + d_{\bar{G}}(v) \geq (m+1)(n_1+n_2-2),$$

即有 $n_1 + n_2 \leq 2 + [(P-1)/(m+1)]$.

这里考虑了 n_1 和 n_2 均为整数. 定理2证毕.

顺便指出: 当 $m=0$ 时, $X_0(G) + X_0(\bar{G}) \leq P+1$ 是图与补图的点色数关系. 当 $m=1$ 时, $X_1(G) + X_1(\bar{G}) \leq 2 + [(p-1)/2] = 1 + \{\frac{P}{2}\}$ 是图与补图的点荫度关系, 即文献[2]中的猜想, 均作为定理2的特款.

2 特殊图的 m -色数

本节仅考虑平面图和完全图的 m -色数.

定理3 若 G 为任意一个平面图, $m \geq 1$, 则 $X_m(G) \leq \max\{4-m, 1\}$.

证 由于每个可平面图 G 的最小度 ≤ 5 , 因此, $\delta_m(G) \leq 5$. 由定理1得 $X_m(G) \leq 1 + [\delta_m(G)/(m+1)]$, 可见 $X_1(G) \leq 3, X_2(G) \leq 2$. 又因为每个可平面图 $G = (p, q)$ 满足 $q \leq 3p - 6 (p \geq 3)$. 因此, 对任意非平凡的平面图 H , 由引理1得

$$r(G) = \max\{q/(n-1)\} \leq \max\{(3n-6)/(n-1)\} \leq 3$$

由 m -色数的定义知 $X_3(G) = 1$, 当然 $m \geq 3$ 时, 也有 $X_m(G) = 1$, 定理3证毕.

上述定理对于 $m=0$ 时是否成立, 此仍属于四色猜想.

定理4 对任意整数 $m \geq 1, n \geq 1$, 均有 $X_m(K_n) = \{n/2m\}$. 其中 $\{x\}$ 表示不小于 x 的最小整数.

证 设 $X_m(K_n) = s$, 由于 $r(K_{2m}) = m$, 故可将 $V(K_n)$ 划分为两两不交的 $2m$ -子集和至多一个小于 $2m$ 个元素的子集. (由于 $2m \geq n$ 时定理显然成立, 故不妨设 $2m < n$). 这些子集的导出子图均为完全图, 其线荫度均不大于 m , 这些子集的个数为 $\{n/2m\}$ 个. 因此 $X_m(K_n) = S$

$\leq \{n/2m\}$.

另一方面, $X_m(K_n) = S$, 由 m -色数定义 $V(K_n) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_m$, $r(K_n[V_i]) = r(K_{|V_i|}) = \left\{ \frac{|V_i|}{2} \right\} \leq m$, 故 $|V_i| \leq 2m$, 因此 $S \geq \frac{n}{2m}$, 由于 S 为整数, 故 $S \geq \left\{ \frac{n}{2m} \right\}$. 定理 4 证毕.

注: 由于任何图的 m -色数不小于其子图的 m -色数, 因此, 对任意 P 阶图 G , $X_m(G) \leq \left\{ \frac{p}{2m} \right\}$, ($m \geq 1$), $X_m(G) + X_m(\bar{G}) \leq 2 \cdot \left\{ \frac{p}{2m} \right\}$, 这是图与补图的 m -色数之和的又一平凡的上界. 此界不如定理 2 所给出的界限好. 例如考虑 100 阶图与其补图的 3-色数之和 S , 由此界得 $S \leq 34$, 但由定理 2 知 $S \leq 26$, 因此, 反映图与补图的 m -色数最好关系是定理 2.

参 考 文 献

- 1 哈拉里 F. 图论. 上海: 上海科技出版社, 1980
- 2 张忠辅, 王建方. 图与补图的荫度. 曲阜师范大学学报, 1990(2): 11~13
- 3 徐保根. 图与补图的线荫度. 华东交通大学学报, 1994(1): 80~84

Generalized Chromatic Number of a Graph and its Complementary Graph

Xu Baoggen

(Department of Basic Courses)

Abstract The concept of generalized chromatic number of graphs, Called m -chromatic number, is introduced in this paper. The relation between a graph and its complementary graph is studied and the m -chromatic numbers in some particular graphs are discussed.

Key words graph; m -chromatic number; vertex-arboricity; edge-arboricity

(上接第 72 页)

参 考 文 献

- 1 Xin zhong Lu, Jincang Han and Zhong fu zhang. On the reciprocal chromatic number of graphs. Pure and Applied Mathematic, 1994(Special Issue), 204~209
- 2 Boudy J A and Murty U S R. Graph Theory with Applications. North-Holland, New York, 1976
- 3 周三明. 图的带宽的若干新下界. 太原机械学院学报, 1994 (Supplement), 24~31

The Notes of Reciprocal Chromatic Number of Graphs

Deng Yixiong

(Department of Basic Courses)

Abstract A conjecture raised by [1] is proved in this paper. The lower bound of bandwidth about the reciprocal chromatic number is derived and the reciprocal chromatic number of some graphs is given as well.

Key words graph; reciprocal chromatic number; independent number; bandwidth