

关于“复数阶仿导数”和 “复数阶微积分方程”的设想

刘诗俊

(基础课部)

摘要 本文对于 $f(x) \in \varphi(R^1)$, 定义了它的“复数阶仿导数 $f^{(\alpha)}(x)$ ”, 并且对 $f(x) \in \mathcal{L}(R^1)$ 证明了 $f^{(\alpha)}(x)$ 在全复平面上是复变量 α 的解析函数. 我们发现当 $\alpha = -1$ 时, $f^{(-1)}(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 因此当 $\operatorname{Re} \alpha < 0$ 时, 我们又称 $f^{(\alpha)}(x)$ 是 $f(x)$ 的复数阶积分. 本文还对 $f(x) \in \mathcal{L}'(R^1)$ 定义了它的“复数阶广义仿导数 $f^{(\alpha)}(x)$ ”. 文中还研究了方程 $f^{(\alpha)}(x) - G(\alpha)f(x) = 0$ ($\alpha \in \mathbb{C}$), 并称之为“复数阶微积分方程”, 得到了其解的表达式.

关键词 复数阶仿导数; 复数阶积分; 复数阶微积分方程

分类号 O 175.2

0 引言

在文献[1]中高安秀树介绍了实数阶导数的概念. 但是在国内外文献中至今未见到关于“复数阶导数”的设想.

本文首先对 $f(x) \in \varphi(R^1)$ 定义了其复数 α 阶仿导数 $f^{(\alpha)}(x)$ (见(1)式), 并证明了 $f^{(\alpha)}(x)$ 在复平面上的 $\mathbb{C} \setminus B$ 域中是 α 的解析函数 (见定理 2.1). 然后, 对 $f(x) \in \mathcal{L}(R^1)$, 用(4)式 (在此式中取 $b \neq 0$) 将 $f^{(\alpha)}(x)$ 解析延拓到全复平面. 并约定, 当 $\operatorname{Re} \alpha < 0$ 时, 也称 $f^{(\alpha)}(x)$ 是 $f(x)$ 的“复数阶积分”. 还证明了 $\frac{d}{dx} f^{(\alpha)}(x) = f^{(\alpha-1)}(x)$ (即(8)式) 及 $(f^{(\alpha)}(x))^{(\beta)} = f^{(\alpha+\beta)}(x) = (f^{(\beta)}(x))^{(\alpha)}$. (见 8 式)

我们又对 $f(x) \in \mathcal{L}'(R^1)$ 定义了其复数 α 阶广义仿导数 $f^{(\alpha)}(x)$, 并且证明了对此 $f^{(\alpha)}(x)$ 也成立类似公式(10)和(11). 基于这些性质, 我们构造出一套“复数阶微积分学”. 由于, 当 $\alpha = n \in \mathbb{N}$ 时, $f^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$ (当 $f(x) \in \mathcal{L}(R^1)$ 时 $f^{(n)}(x)$ 为古典导数, 当 $f(x) \in \mathcal{L}'(R^1)$ 时 $f^{(n)}(x)$ 是广义导数), 所以, 本文提出的“复数阶微积分学”在一定条件下推广了古典导数和广义导数. 在此, 我们要说明, 本文给出的 $f^{(\alpha)}(x)$ 定义, 即使当 $\operatorname{Im} \alpha = 0$ 时, 也和文献[1]中所介绍的实数阶导数定义完全不同.

本文中的一些基本结果不难推广到 α 为多复变量(指 $\alpha \in \mathbb{C}^n$) 的情形, 并运用多复变量函数论工具进行研究, 笔者对 $\alpha \in \mathbb{C}^n$ 已得到一些结果. 考虑到单复变量情形叙述方便, 而“复数阶微积分学”这一设想似乎颇具生命力, 故先将单复变量的理论作此介绍.

1 $\varphi(R^1)$ 中函数的“复数阶仿导数”

定义 1.1 设 $f(x) \in \varphi(R^1)$, 规定

$$f^{(\alpha)}(x) = \int_{R^1} \hat{f}(\xi) (i\xi)^{\alpha} e^{ix\xi} d\xi, \quad (1)$$

并称 $f^{(\alpha)}(x)$ 为 $f(x)$ 的 α 阶仿导数.

注 在此 α 是复数(即 $\alpha \in \mathbb{C}$), $x, \xi \in \mathbb{R}^1$, 取 $(i\xi)^{\alpha} = e^{\alpha(\ln|\xi| + i\arg(i\xi))}$, $\hat{f}(\xi) = \int_{R^1} f(x) e^{-ix\xi} dx$ $d\xi$ 即 $(2\pi)^{-1} d\xi$, $\varphi(R^1)$ 是一切在无穷远处急降的取复函数值的具 C^∞ 光滑性的一元函数 $f(x)$ 组成的 $\mathbb{C}$ 上的线性空间.

显然, 当 $\operatorname{Re} \alpha > -1$ 时, (1) 式右端的积分收敛. 又当 $\alpha = 0, 1, \dots, n, \dots$ 时, $f^{(\alpha)}(x) = f^{(n)}(x)$.

定理 1.1 设 $f(x) \in \varphi(R^1)$, 则 $f^{(\alpha)}(x)$ 在 $\mathbb{C} \setminus B$ 域中是复变量 α 的解析函数. 在此 $\mathbb{C} \setminus B = \{\alpha; \alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq -K, K \in \mathbb{N}\}$.

证明

$$\begin{aligned} \int_{R^1} \hat{f}(\xi) (i\xi)^{\alpha} e^{ix\xi} d\xi &= \int_1^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} (i\xi)^{\alpha} d\xi \\ &+ \int_{-\infty}^{-1} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} (i\xi)^{\alpha} d\xi + \int_0^1 (i\xi)^{\alpha} e^{ix\xi} [\hat{f}(\xi) - \sum_{j=0}^{K-1} \frac{\hat{f}(0)^{(j)}}{j!} \xi^j] d\xi \\ &+ \int_0^1 (i\xi)^{\alpha} e^{ix\xi} \sum_{j=0}^{K-1} \frac{\hat{f}(0)^{(j)}}{j!} \xi^j d\xi + \int_{-1}^0 (i\xi)^{\alpha} e^{ix\xi} [\hat{f}(\xi) - \sum_{j=0}^{K-1} \frac{\hat{f}(0)^{(j)}}{j!} \xi^j] d\xi + \int_{-1}^0 (i\xi)^{\alpha} e^{ix\xi} \sum_{j=0}^{K-1} \frac{\hat{f}(0)^{(j)}}{j!} \xi^j d\xi. \end{aligned}$$

但是 $\int_0^1 (i\xi)^{\alpha} e^{ix\xi} [\hat{f}(\xi) - \sum_{j=0}^{K-1} \frac{\hat{f}(0)^{(j)}}{j!} \xi^j] d\xi = \int_0^1 (i\xi)^{\alpha} e^{ix\xi} O(1) \xi^K d\xi$,

所以, 当 $\operatorname{Re} \alpha > -K-1$ 时, 此积分收敛. 又因为

$$\frac{d}{d\alpha} \int_0^1 (i\xi)^{\alpha} e^{ix\xi} O(1) \xi^K d\xi = \int_0^1 (i\xi)^{\alpha} \operatorname{Ln}(i\xi) e^{ix\xi} O(1) \xi^K d\xi,$$

故 $\int_0^1 (i\xi)^{\alpha} e^{ix\xi} [\hat{f}(\xi) - \sum_{j=0}^{K-1} \frac{\hat{f}(0)^{(j)}}{j!} \xi^j] d\xi$ 对 α 解析(当 $\operatorname{Re} \alpha > -K-1$).

同理 $\int_{-1}^0 (i\xi)^{\alpha} e^{ix\xi} [\hat{f}(\xi) - \sum_{j=0}^{K-1} \frac{\hat{f}(0)^{(j)}}{j!} \xi^j] d\xi$ 对 α 解析(当 $\operatorname{Re} \alpha > -K-1$).

对于 $\int_0^1 (i\xi)^{\alpha} e^{ix\xi} \sum_{j=0}^{K-1} \frac{\hat{f}(0)^{(j)}}{j!} \xi^j d\xi$, 任取其中第 j 项, 接连地分部积分. 当 $\operatorname{Re} \alpha > -1$ 时, 有*

$$\begin{aligned} \int_0^1 (i\xi)^{\alpha} e^{ix\xi} \xi^j d\xi &= (2\pi)^{-1} i^{\alpha} \left[\frac{\xi^{\alpha-j+1}}{\alpha+j+1} e^{ix\xi} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\xi^{\alpha-j+1}}{\alpha+j+1} (ix) e^{ix\xi} d\xi \\ &= (2\pi)^{-1} i^{\alpha} \left[\frac{e^{ix}}{\alpha+j+1} - \frac{\xi^{\alpha-j-2}}{(\alpha+j+1)(\alpha+j+2)} ix e^{ix\xi} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\xi^{\alpha-j-2} (ix)^2}{(\alpha+j+1)(\alpha+j+2)} e^{ix\xi} d\xi \end{aligned}$$

* 当 $\xi > 0$ 时, 易知 $(i\xi)^{\alpha} = i^{\alpha} \xi^{\alpha}$ 在主值意义下成立.

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-1} i^{\alpha} \left[\frac{e^{ix}}{\alpha+j+1} - \frac{ix e^{ix}}{(\alpha+j+1)(\alpha+j+2)} + \cdots + (-1)^{K-j-1} \right. \\
&\quad \left. \frac{(ix)^{K-j-1} e^{ix}}{(\alpha+j+1)(\alpha+j+2)\cdots(\alpha+K)} + (-1)^{K-j} \int_0^1 \frac{\xi^{\alpha-K} (ix)^{K-j} e^{i\xi x}}{(\alpha+j+1)\cdots(\alpha+K)} d\xi \right] \\
&= (2\pi)^{-1} i^{\alpha} [R_j(x) + (-1)^{K-j} \int_0^1 \frac{\xi^{\alpha+K} (ix)^{K-j} e^{i\xi x}}{(\alpha+j+1)\cdots(\alpha+K)} d\xi]. \quad (j=0,1,\cdots,K-1) \quad (2)
\end{aligned}$$

(在此 $R_j(x)$ 的表达式从式中可直接看出,兹不赘述.)

显然,当 $\operatorname{Re} \alpha > -K$ 且 $\alpha \neq -1, -2, \cdots, -K+1$ 时,积分 $\int_0^1 \frac{\xi^{\alpha+K} (ix)^{K-j} e^{i\xi x}}{(\alpha+j+1)\cdots(\alpha+K)} d\xi$ 对 α 解析;又当 $\alpha \neq -1, -2, \cdots, -K+1$ 时 $R_j(x)$ 对 α 解析. 现在用(2)式将积分从 $\operatorname{Re} \alpha > -1$ 解析延拓到 $\operatorname{Re} \alpha > -K$ 且 $\alpha \neq -1, \cdots, -K+1$ ($\forall K \in \mathbb{N}$). 对积分 $\int_{-1}^0 (i\xi)^{\alpha} e^{i\xi x} \sum \frac{\hat{f}(0)^{(j)}}{j!} \xi^j d\xi$ 作同样处理. 至于 $\int_1^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} (i\xi)^{\alpha} d\xi$ 及 $\int_{-\infty}^{-1} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} (i\xi)^{\alpha} d\xi$, 它们显然对 $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ 为解析,故 $f^{(\alpha)}(x)$ 在 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus B$ 域中解析(注意 $\alpha = -1, -2, \cdots, -K$, 不一定是 $f^{(\alpha)}(x)$ 的极点).

例 对于 $f(x) \in \varphi(R^1)$, 任取 $(\alpha_0, x) \in \mathbb{C} \setminus B \times R^1$, 由 Taylor 公式, 有(当 α 充分接近 α_0)

$$\begin{aligned}
f^{(\alpha)}(x) &= \sum_{K=0}^{\infty} \frac{d^K}{d\alpha^K} f^{(\alpha)}(x) \Big|_{\alpha=\alpha_0} (\alpha - \alpha_0)^K = \sum_{K=0}^{\infty} \left(\int_{R^1} \hat{f}(\xi) (i\xi)^{\alpha_0} \operatorname{Ln}^K(i\xi) e^{i\xi x} d\xi \right) (\alpha - \alpha_0)^K \\
&= \int_{R^1} \hat{f}(\xi) (i\xi)^{\alpha_0} e^{i\xi x} \sum_{K=0}^{\infty} (\operatorname{Ln}^K(i\xi) (\alpha - \alpha_0)^K) d\xi \\
&= \int_{R^1} \hat{f}(\xi) (i\xi)^{\alpha_0} e^{i\xi x} e^{(\alpha - \alpha_0) \operatorname{Ln}(i\xi)} d\xi \\
&= \int_{R^1} \hat{f}(\xi) (i\xi)^{\alpha_0} e^{i\xi x} (i\xi)^{\alpha - \alpha_0} d\xi \\
&= \int_{R^1} \hat{f}(\xi) (i\xi)^{\alpha} e^{i\xi x} d\xi.
\end{aligned}$$

这就直接验证了定理(1).

定义 1.2 一切满足

$$|s|^q |\psi(s)| \leq C_q e^{a|s|} \quad (q=0,1,\cdots,n,\cdots) \quad (3)$$

的复变量 $s = \xi + i\eta$ 的解析函数 $\psi(s)$ 所构成的 $\mathbb{C}$ 上的线性空间, 称为 Z 空间(参看文献[2]).

在(3)式中, a 是依赖于 $\psi(s)$ 的正的常数, 而 $C_q > 0$ 是与 $\psi(s)$ 及 q 有关的常数.

当 $\varphi(x) \in \mathscr{D}(R^1)$ 时, 它的 Fourier-Laplace 变换(以下简记为 $F.L.$ 变换)为

$$\hat{\varphi}(s) = \int_{R^1} \varphi(x) e^{-isx} dx.$$

($\hat{\varphi}(s)$ 又记为 $F[\varphi]$). 当 $\operatorname{Im} s = 0$ 时, $\hat{\varphi}(s) = \hat{\varphi}(\xi)$ 即 $\varphi(x)$ 的 Fourier 变换(以 T 记为 F 变换).

由熟知的 Palay-Wiener 定理立得结论: 映射 $\mathscr{D}(R^1) \xrightarrow{F.L. \text{ 变换}} Z$ 既是单射又是满射(参看文献[3])中定理 4.12 或文献[2]中第 2 章 §1).

我们得到

引理 1.1 设 $\varphi(x) \in \mathscr{D}(R^1)$, 且 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus B$, 则

* $\mathscr{D}(R^1)$ 即文献[2]中的一维(复) K 空间.

$$(1) \varphi^{(q)}(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-ib}^{-ib-i\eta} \hat{\varphi}(s)(is)^q e^{-ixs} ds \quad (\forall b \in \mathbf{R})$$

$$(2) \varphi^{(q)}(x) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$$

证明 (参考文献[2]), 当 $\varphi(x) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$, 则 $\exists a > 0$, 使 $\text{supp } \varphi(x) \subset [-a, a]$, 于是 $\hat{\varphi}(s) = \int_{-a}^a \varphi(x) e^{-ixs} dx = \int_a^s \varphi(x) e^{-ixs} dx (s = \xi + i\eta)$, 所以 $|(is)^q \hat{\varphi}(s)| = \left| \int_a^s \varphi^{(q)}(x) e^{-ixs} dx \right| \leq \int_a^s |\varphi^{(q)}(x)| e^{-\eta x} dx \leq \max |\varphi^{(q)}(x)| \int_a^s (e^{-\eta x} + e^{-\eta s}) dx \leq \max |\varphi^{(q)}(x)| \int_0^s 2e^{-\eta x} dx \leq 2 \max |\varphi^{(q)}(x)| e^{a|\eta|} |a| = C_q e^{a|\eta|}, (\forall q = 0, 1, \dots, n, \dots) \quad C_q = C_q(\varphi, q)$, 即(3)式成立. 于是, 对任给的 $\eta_1, \eta_2 \in \mathbf{R} (\eta_1 < \eta_2)$ 及 $\xi = 0$, 对于复变量 $s = \xi + i\eta$ 在平行虚轴的线段 $\xi + i\eta_1$ 至 $\xi + i\eta_2$ 上的积分 $\int_{\xi-i\eta_1}^{\xi-i\eta_2} \hat{\varphi}(s)(is)^q e^{-ixs} ds$ 有估计式 $\left| \int_{\xi-i\eta_1}^{\xi-i\eta_2} \hat{\varphi}(s)(is)^q e^{-ixs} ds \right| \leq \int_{\eta_1}^{\eta_2} C_q |s|^{-q} e^{a|\eta|} |(is)^q| e^{-\eta x} d\eta, \quad (q = 0, 1, \dots, n)$ 选正整数 q 充分大, 容易证明当 $|x| \rightarrow +\infty (\eta_1$ 及 η_2 给定) 时积分 $\int_{\xi-i\eta_1}^{\xi-i\eta_2} \hat{\varphi}(s)(is)^q e^{-ixs} ds \rightarrow 0$. 于是用复变函数论中的 Cauchy 回路积分定理可得(4)式. 于是(1)得证.

现在证结论(2). 由 $|(is)^q| = |s|^{\text{Re } q} |e^{-i \text{Im } q \arg(is)}|$ 及 $|e^{-ixs}| = |e^{-i(\xi-i\eta)x}| = e^{-\eta x}$, 并由(4)式得

$$\begin{aligned} |\varphi^{(q)}(x)| &= \left| (2\pi)^{-1} \int_{-ib}^{-ib-i\eta} \hat{\varphi}(s)(is)^q e^{-ixs} ds \right| \quad (\text{任取 } b \neq 0) \\ &\leq (2\pi)^{-1} \int_{-ib}^{-ib-i\eta} C_q |s|^{\text{Re } q} e^{a|\eta|} |e^{-i \text{Im } q \arg(is)}| e^{-\eta x} ds \\ &\leq (2\pi)^{-1} C_q e^{a|\eta|} \int_{-ib}^{-ib-i\eta} (\sqrt{b^2 + \xi^2})^{\text{Re } q} d\xi \\ &= C_q'(q, \varphi, |\text{Im } \alpha|) e^{a|b|} \int_{-b}^{-b-\eta} (\sqrt{b^2 + \xi^2})^{\text{Re } q} d\xi. \end{aligned}$$

现在, 仅为推演方便, 先在 $\text{Re } \alpha = 0$ 的范围中来估计, 这时

$$|\varphi^{(q)}(x)| \leq C_q' e^{a|b|} \int_{-b}^{-b-\eta} (b^2 + \xi^2)^{\frac{1}{2}q} d\xi, \quad (\forall b \in \mathbf{R}, b \neq 0) \quad (q = 0, 1, \dots, n, \dots)$$

$$\text{取 } q = 2, \text{ 得 } |\varphi^{(2)}(x)| \leq C_q' \frac{\pi}{b} e^{a|b|} \quad (\forall b \in \mathbf{R}, b \neq 0)$$

当 $x > a$ 时, 令 $b \rightarrow +\infty$, 这时 $e^{a|b|} \rightarrow 0$.

又当 $x < -a$ 时, 令 $b \rightarrow -\infty$, 这时 $e^{a|b|} \rightarrow 0$.

可见, 当 $|x| > a$ 时, $\varphi^{(2)}(x) = 0$ (当 $\text{Re } \alpha = 0$). 即当 $\text{Re } \alpha = 0$ 时, 有 $\text{Supp } \varphi^{(2)}(x) \subset [-a, a]$. 于是对任何 $x_0 \in \mathbf{R}$ 且 $|x_0| > a$, 注意到 $\varphi^{(2)}(x_0)$ 当 $\alpha \in C \setminus B$ 时解析 (见定理 1) 且 $\varphi^{(2)}(x_0) = 0$ 当 $\text{Re } \alpha = 0$ 时成立. 于是, 根据解析函数的唯一性定理可见, 当 $\alpha \in C \setminus B$ 时, $\varphi^{(2)}(x_0) = 0$. 故

$$\text{Supp } \varphi^{(2)}(x) \in [-a, a]. \text{ 于是 } \varphi^{(2)}(x) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^1).$$

证毕

引理 1.2 设 $\varphi(x) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$, 则积分 $(2\pi)^{-1} \int_{-ib}^{-ib-i\eta} \hat{\varphi}(s)(is)^q e^{-ixs} ds$, 当 $b \neq 0$ 时对 α 在全复平面上解析.

证 由不等式(3)得

$$\int_{-ib}^{-ib-i\eta} |\hat{\varphi}(s)(is)^q e^{-ixs}| ds \leq \int_{-ib}^{-ib-i\eta} C_q |s|^{-q} e^{a|b|} |s|^{\text{Re } q} e^{-i \text{Im } q \arg(is)} e^{-\eta x} ds. \quad (5)$$

但当 $b \neq 0$ 时, 在此积分所在的无穷长线段上, 有 $|s| \geq |b|$, 故当 $q \in \mathbf{N}$ 充分大时, (5)式右端

的积分收敛. 由此可证明, 对复平面上任何给定的有界域 U 而言, 当 $\alpha \in U$ 时积分 $\int_{\infty-ib}^{\infty-ib} \hat{\varphi}(s)(is)^\alpha e^{isx} ds$ 对 α 一致收敛 (当 $b \neq 0$ 给定). 又 $\hat{\varphi}(s)(is)^\alpha e^{isx}$ 当 $\alpha \in U$ 时对 α 解析 (注意 $|s| \geq |b| > 0$), 且 $\int_{\infty-ib}^{\infty-ib} \hat{\varphi}(s)(is)^\alpha \ln(is) e^{isx} ds$ 对 $\alpha \in U$ 为一致收敛, 故积分 $\int_{\infty-ib}^{\infty-ib} \hat{\varphi}(s)(is)^\alpha e^{isx} ds$ 可对 α 求导数 (当 $\alpha \in U$). 但有界域 U 为任取, 故此积分对 α 在全复平面解析.

现在, 我们以 (4) 式 (在其中取 $b \neq 0$) 作为 $\varphi^{(\alpha)}(x)$ 的定义 (当 $\varphi(x) \in \mathcal{D}(R^1)$). 这样, $\varphi^{(\alpha)}(x)$ 就从 $\alpha \in C \setminus B$ 解析延拓到全复平面了. 显然, 这时也有 $\varphi^{(\alpha)}(x) \in \mathcal{D}(R^1)$ (用引理 1.1 中结论 (2) 的论证方法可得此结论).

注意引理 1.2 与定理 1.1 并不矛盾.

定理 1.2 设 $\varphi(x) \in \mathcal{D}(R^1)$. 用 $\langle \alpha \rangle \varphi \triangleq (\varphi)^{(\alpha)} \triangleq \varphi^{(\alpha)}(x)$, 定义算子 $\langle \alpha \rangle$. 这时, 算子 $\langle \cdot \rangle$ 是一个 Abel 群.

证 先证对 $\forall \alpha, \beta \in C$, 有

$$(\varphi^{(\alpha)}(x))^{(\beta)} = \varphi^{(\alpha+\beta)}(x). \quad (6)$$

由 (4) 式 (取 $b \neq 0$) 可得

$$\hat{\varphi}^{(\alpha)}(s) = \hat{\varphi}(s)(is)^\alpha. \quad (7)$$

于是, 再用 (4) 式 (仍取 $b \neq 0$) 得

$$\begin{aligned} (\varphi^{(\alpha)}(x))^{(\beta)} &= (2\pi)^{-1} \int_{\infty-ib}^{\infty-ib} \hat{\varphi}^{(\alpha)}(s)(is)^\beta e^{isx} ds \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{\infty-ib}^{\infty-ib} \hat{\varphi}(s)(is)^\alpha (is)^\beta e^{isx} ds \\ &= \varphi^{(\alpha+\beta)}(x). \end{aligned}$$

(注意, 当 $(is)^\alpha, (is)^\beta$ 和 $(is)^{\alpha+\beta}$ 均在主值意义下时, 有 $(is)^\alpha \cdot (is)^\beta = (is)^{\alpha+\beta}$)

由此可见

$$(\varphi^{(\alpha)}(x))^{(\beta)} = (\varphi^{(\beta)}(x))^{(\alpha)}, \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}(R^1))$$

即

$$\langle \beta \rangle \cdot \langle \alpha \rangle = \langle \alpha \rangle \cdot \langle \beta \rangle. \quad (8)$$

又, 显然算子 $\langle \cdot \rangle$ 有单位元 $I = \langle 0 \rangle$ 且对 $\forall \alpha \in C, \langle \alpha \rangle$ 有逆元 $\langle \alpha \rangle^{-1} = \langle -\alpha \rangle$. 可见, 算子 $\langle \cdot \rangle$ 组成一个 Abel 群. 证毕

定理 1.3 设 $\varphi(x) \in \mathcal{D}(R^1)$, 则

$$\frac{d}{dx} \varphi^{(\alpha)}(x) = \varphi^{(\alpha-1)}(x). \quad (9)$$

证 对 $\forall \alpha \in C$, 函数 $\psi(s, x) = \hat{\varphi}(s)e^{isx}(is)^\alpha$ 及 $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \hat{\varphi}(s)e^{isx}(is)^{\alpha-1}$ 对 s 及 x 二变元连续 (当 $s \neq 0, x \in R$). 又由

$$|\hat{\varphi}(s)e^{isx}(is)^{\alpha-1}| \leq C_q |s|^{-q} |s|^{Re\alpha-1} e^{-Im\alpha x - Im(\alpha-1) \arg(is)}, \quad (q = 0, 1, \dots, n, \dots)$$

可见积分 $(2\pi)^{-1} \int_{\infty-ib}^{\infty-ib} \hat{\varphi}(s)(is)^{\alpha-1} e^{isx} ds$ (取定 $b \neq 0$) 在任何有界域 $\Omega \subset R^1$ 上对 x 一致收敛. 可见 (9) 式成立. 证毕

由此可见, $\varphi^{(-1)}(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的原函数. 所以, 本文提出的“复数阶仿导数”, 把 $\varphi(x)$ 的积分也包括在内. 在某种意义上, 这里给出了函数 (及下文中的广义函数) 的“复数阶微积分学”.

当 $Re\alpha < 0$ 时, 我们又称 $\varphi^{(\alpha)}(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的“复数阶积分”或“ $-\alpha$ 阶积分”.

2 $\mathcal{D}'(R^1)$ 中广义函数的“复数阶广义仿导数”

定义 2.1 对于 $f(x) \in \mathcal{D}'(R^1)$, 用公式

$$\langle f^{(\alpha)}(x), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), (-1)^\alpha \varphi^{(\alpha)}(x) \rangle \quad (10)$$

($\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}(R^1), \forall \alpha \in \mathbb{C}, (-1)^\alpha = e^{i\pi\alpha}$ (主值)) 来定义 $f^{(\alpha)}(x)$, 并称它为“ $f(x)$ 的 α 阶广义仿导数”. 注意 $\langle f, \varphi \rangle$ 是熟知的 $f \in \mathcal{D}'$ 与 $\varphi \in \mathcal{D}$ 的 Euclid 对偶, 它满足 $\langle f, C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 \rangle = C_1\langle f, \varphi_1 \rangle + C_2\langle f, \varphi_2 \rangle$ ($\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}, \forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}$) 及 $\langle f, c\varphi \rangle = c\langle f, \varphi \rangle$. ($\forall \varphi \in \mathcal{D}, \forall c \in \mathbb{C}$)

由于 $\varphi^{(\alpha)}(x) \in \mathcal{D}(R^1)$ (参看引理 2.1), 故 $f^{(\alpha)}(x) \in \mathcal{D}'(R^1)$.

定理 2.1 当 $f(x) \in \mathcal{D}'(R^1)$, 则对 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, 有

$$(1) \quad (f^{(\alpha)}(x))^{(\beta)} = f^{(\alpha+\beta)}(x), \quad (11)$$

$$(2) \quad \frac{d}{dx} f^{(\alpha)}(x) = f^{(\alpha+1)}(x). \quad (12)$$

证明 由

$$\begin{aligned} \langle (f^{(\alpha)}(x))^{(\beta)}, \varphi(x) \rangle &= \langle f^{(\alpha)}(x), (-1)^\beta \varphi^{(\beta)}(x) \rangle \\ &= \langle f(x), (-1)^\alpha ((-1)^\beta \varphi^{(\beta)}(x))^{(\alpha)} \rangle \\ &= \langle f(x), (-1)^{\alpha+\beta} \varphi^{(\alpha+\beta)}(x) \rangle \\ &= \langle f^{(\alpha+\beta)}(x), \varphi(x) \rangle \quad (\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}(R^1)) \end{aligned}$$

得(11)式. 又由

$$\begin{aligned} \langle \frac{d}{dx} f^{(\alpha)}(x), \varphi(x) \rangle &= \langle f^{(\alpha)}(x), -\varphi'(x) \rangle = \langle f^{(\alpha)}(x), (-1)^\alpha (-\varphi'(x))^{(\alpha)} \rangle \\ &= \langle f(x), (-1)^{\alpha+1} (\varphi'(x))^{(\alpha)} \rangle \end{aligned}$$

但是

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(s) &= \int_{-\infty-ib}^{+\infty+ib} \varphi'(x) e^{-isx} dx = is \int_{-\infty-ib}^{+\infty+ib} \varphi(x) e^{-isx} dx \quad (b \neq 0, \varphi \in \mathcal{D}(R^1)) \\ &\quad (\text{分部积分即得}) \\ &= is \hat{\varphi}(s), \end{aligned} \quad (13)$$

(注意此式与文献[2]中的不同)

$$\begin{aligned} \text{故} \quad (\varphi'(x))^{(\alpha)} &= \int_{-\infty-ib}^{+\infty+ib} \hat{\varphi}(s) (is)^\alpha e^{isx} ds = \int_{-\infty-ib}^{+\infty+ib} \hat{\varphi}(s) (is) (is)^\alpha e^{isx} ds. \\ &\quad (ds \text{ 即 } (2\pi)^{-1} ds) \end{aligned}$$

即

$$(\varphi'(x))^{(\alpha)} = \varphi^{(\alpha+1)}(x). \quad (14)$$

于是 $\langle f(x), (-1)^{\alpha-1} (\varphi'(x))^{(\alpha)} \rangle = \langle f(x), (-1)^{(\alpha-1)} \varphi^{(\alpha+1)}(x) \rangle = \langle f^{(\alpha+1)}(x), \varphi(x) \rangle$.

故(12)式成立. 证毕

由此, 我们得到

定理 2.2 当 $f(x) \in \mathcal{D}'(R^1)$ 且 $\alpha \in \mathbb{C}$ 时, 作用于 $f(x)$ 的运算 $\langle \alpha \rangle$ 形成一个 Abel 群 (证明略).

定义 2.2 对于 $f(x) \in \mathcal{D}'(R^1)$, 用公式

$$(\tilde{f}(s), \psi(s)) = 2\pi (f(x), \varphi(x)). \quad (15)$$

($\forall \psi(s) \in \mathcal{Z}, \varphi(x) \in \mathcal{D}(R^1)$ 满足 $\hat{\varphi}(s) = \psi(s)$) 来定义 $\tilde{f}(s) \in \mathcal{Z}'$, 并称 $\tilde{f}(s)$ 是 $f(x)$ 的

F, L 变换(当 $\text{Im}s = 0$ 时, (15) 式定义的是 $f(x)$ 的 F 变换). 在此, (f, φ) 是 $f \in \mathcal{D}'$ 和 $\varphi \in \mathcal{D}$ 的 Hermite 对偶, 它满足

$$(f, c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = \overline{c_1}(f, \varphi_1) + \overline{c_2}(f, \varphi_2)$$

$$(\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D} \text{ 及 } \forall c_1, c_2 \in \mathbb{C})$$

$$\text{及} \quad (f, c\varphi) = \overline{c}(f, \varphi) \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}, \forall c \in \mathbb{C})$$

引理 2.1 当 $f(x) \in \mathcal{D}'(R^1)$ 时, 有

$$F[x^K f] = i^K \frac{d^K}{ds^K} F[f] \quad (K = 0, 1, \dots, n, \dots) \quad (16)$$

$$\text{及} \quad F\left[\frac{df}{dx}\right] = (is)F[f]. \quad (17)$$

证明 由(15)式可见, 对 $\forall \psi(s) \in \mathcal{Z}$, 有

$$\begin{aligned} (F[ixf], \psi) &= 2\pi(ixf, \varphi) \quad (\varphi = F^{-1}[\psi]) \\ &= 2\pi(f, -ix\varphi) = (F[f], F(-ix\varphi)) \\ &= (F[f], \frac{d}{ds}F[\varphi]) = (-\frac{d}{ds}F[f], \psi), \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad F[ixf] = -\frac{d}{ds}F[f].$$

由此易知(16)式成立.

又, 对于 $\text{Im}s = 0$, 这时对 $\forall \psi(s) \in \mathcal{Z}$, 有 $\psi(s) = \psi(\xi) \quad (s = \xi + i\eta)$. 于是

$$\begin{aligned} (F\left[\frac{df}{dx}\right], \psi) &= 2\pi\left(\frac{df}{dx}, \varphi\right) \quad (\varphi = F^{-1}[\psi]) \\ &= 2\pi(f, -\frac{d\varphi}{dx}) = (F[f], F[-\frac{d\varphi}{dx}]) \\ &= (F[f], -i\xi F[\varphi]) = (i\xi F[f], \psi). \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad F\left[\frac{df}{dx}\right] = i\xi F[f] = isF[f]. \quad (\text{当 } \text{Im}s = 0)$$

于是, 对任何复数 s , (17) 式成立. 证毕

注 这里的公式(16)与(17)都与文献[2]中的不同.

引理 2.2 设 $f(x) \in \mathcal{D}'(R^1)$, 则对 $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, 有

$$F[f^{(\alpha)}(x)] = (is)^\alpha F[f(x)]. \quad (18)$$

证明 当 $s = \text{Res} = \xi$ 时, 对 $\forall \psi \in \mathcal{Z}$, 有

$$\begin{aligned} (F[f^{(\alpha)}(x)], \psi) &= 2\pi(f^{(\alpha)}(x), \varphi(x)) \quad (\varphi = F^{-1}[\psi]) \\ &= 2\pi(f(x), (-1)^\alpha \varphi^{(\alpha)}(x)) \quad (\text{由(10)式易得此式}) \\ &= (F[f(x)], F[(-1)^\alpha \varphi^{(\alpha)}(x)]) \\ &= (F[f(x)], (-1)^\alpha (i\xi)^\alpha F[\varphi(x)]) \quad (\text{见(7)式}) \\ &= ((i\xi)^\alpha F[f(x)], \psi(x)) \\ &= ((is)^\alpha F[f(x)], \psi(s)). \end{aligned}$$

由此可见, 当 s 为任何复值时, (18) 式成立.

3 复数阶微积分方程

在本节中, 考虑如下方程, 即

$$f^{(\alpha)}(x) - G(\alpha)f(x) = 0. \quad (A)$$

在此 $G(\alpha)$ 是在复平面上某区域中解析的复函数.

当 $\alpha = -n$ ($n \in \mathbb{N}$) 时 (A) 式是积分方程, 当 $\alpha = n$ 时 (A) 式是微分方程. 所以我们称 (A) 式为“复数阶微积分方程”.

现在, 我们在 $\mathcal{D}'(R^1)$ 中求方程 (A) 式的解.

对 (A) 式作 $F.L.$ 变换. 由 (18) 式, 得

$$[(is)^{\alpha} - G(\alpha)] \cdot \hat{f}(s) = 0. \quad (B)$$

称方程

$$(is)^{\alpha} - G(\alpha) = 0 \quad (C)$$

为方程 (A) 式的特征方程. 记方程 (C) 式的复根为 s_0 , 则 $\hat{f}(s) = \delta(s - s_0)$ 是 (B) 式的解. 事实上, 对 $\forall \psi(s) \in \mathcal{Z}$, 有

$$\begin{aligned} \langle ((is)^{\alpha} - G(\alpha))\hat{f}, \psi(s) \rangle &= \langle ((is)^{\alpha} - G(\alpha))\delta(s - s_0), \psi(s) \rangle \\ &= \langle \delta(s - s_0), ((is)^{\alpha} - G(\alpha))\psi(s) \rangle \\ &= ((is_0)^{\alpha} - G(\alpha))\psi(s_0) = 0. \end{aligned}$$

可见

$$((is)^{\alpha} - G(\alpha))\delta(s - s_0) = 0.$$

现在, 我们需要公式

$$F^{-1}[\delta(s + ib)] = \frac{1}{2\pi} e^{bx}, \quad (19)$$

此式可用文献 [2] 中第二章 §2 中公式 (8) 的证明方法来导出 (注意 (19) 式与文献 [2] 中第二章 §2 中的 (8) 不同). 于是

$$f(x) = F^{-1}[\delta(s - s_0)] = \frac{1}{2\pi} e^{i s_0 x}. \quad (D)$$

但由特征方程 (C) 式可见 $(is_0)^{\alpha} = [G(\alpha)]^{\frac{1}{\alpha}}$, 于是方程 (A) 式有非平凡解 (在下式中去掉了常数因子 $\frac{1}{2\pi}$)

$$f(x) = e^{i G(\alpha) \frac{1}{\alpha} x}, \quad (f(x) \in \mathcal{D}'(R^1)) \quad (E)$$

现在, 对 (E) 式作更直接的验证. 取 $G(\alpha) = \alpha^{\alpha}$ (这时 $G(\alpha)$ 在 $\alpha \neq 0$ 处解析). 于是 $f(x) = e^{\alpha x}$ 应当是方程

$$f^{(\alpha)}(x) - \alpha^{\alpha} f(x) = 0 \quad (A')$$

的非平凡解. 当 $\alpha = n \in \mathbb{N}$ 时, $f(x) = e^{\alpha x}$ 显然是其解. 又当 $\alpha = -1$ 时, (A') 式即

$$f^{-1}(x) + f(x) = 0. \quad (A'')$$

我们来验证 $f(x) = e^{-x}$ 是 (A'') 式的解.

用 (10) 式及 (12) 式, 得到: 对 $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}(R^1)$ 有

$$\begin{aligned} \langle (e^{-x})^{-1}, \varphi(x) \rangle &= \langle e^{-x}, (-1)\varphi^{-1}(x) \rangle \\ &= \langle -\frac{d}{dx} e^{-x}, (-1)\varphi^{-1}(x) \rangle = \langle \frac{d}{dx} e^{-x}, \varphi^{-1}(x) \rangle \\ &= \langle e^{-x}, -\frac{d}{dx} \varphi^{-1}(x) \rangle = \langle -e^{-x}, \varphi(x) \rangle. \end{aligned}$$

由此可见, 当 $f(x) = e^{-x}$ 时, $f^{-1}(x) = -e^{-x}$, 验证毕. 这样, 我们对方程 (A') 式是某些微分方程 (取 $\alpha = n$) 和积分方程 (取 $\alpha = -1$) 时, 都直接验证了 $f(x) = e^{\alpha x}$ 确实是解.

4 多复变数情况下的复数阶微积分学简介

定义 4.1 对于 $f(x) \in \varphi(R^n)$ 及 $\alpha \in \mathbb{C}^n$, 我们规定

$$f^{(\alpha)}(x) = \int_{R^n} \hat{f}(\xi) (i\xi)^\alpha e^{ix \cdot \xi} d\xi. \quad (20)$$

在此式中, 重指标 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ($\alpha_k \in \mathbb{C}$), 重指标 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ($\xi_k \in \mathbb{R}$), 重指标 $(i\xi)^\alpha = \prod_{k=1}^n (i\xi_k)^{\alpha_k}$, $d\xi$ 即 $(2\pi)^{-n} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n$, 重指标 $x = (x_1, \dots, x_n)$ ($x_k \in \mathbb{R}$)

定义 4.2 对于 $f(x) \in \mathcal{D}'(R^n)$, 我们用

$$\langle f^{(\alpha)}(x), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), (-1)^{|\alpha|} \varphi^{(\alpha)}(x) \rangle \quad (21)$$

$$(\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}(R^n), \forall \alpha \in \mathbb{C}^n, |\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k)$$

来定义 $f^{(\alpha)}(x)$.

在这种 α 为多复变数的情形下, 我们得到了一些类似的结论和公式, 但工作尚未完成.

参 考 文 献

- 1 高安秀树. 分数维. 北京: 地震出版社, 1989(中译本)
- 2 Гелфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенных функций, Том, I, физматгиз, Москва, 1956
(中译本: И. М. 盖尔芳特, Г. Е. 希洛夫. 广义函数, 卷 I. 北京: 科学出版社, 1965 年 11 月第一版)
- 3 Barros-Neto, Jose'. An Introduction to the Theory of Distributions. Marcel Dekker, Inc. New York, 1973
- 4 齐民友. 偏微分算子引论. 北京: 科学出版社

The Ideas of “para-derivative of complex order” and “calculus equation of complex order”

Liu Shijun

(Department of Basic Courses)

Abstract In this paper, firstly $f^{(\alpha)}(x) (\alpha \in \mathbb{C})$ is defined as $f(x) \in \varphi(R^1)$ and called “para-derivative of complex order”. Then $f^{(\alpha)}(x)$ is proved to have analytic function for $\alpha \in \mathbb{C}$ when $f(x) \in D(R^1)$. As $f^{(\alpha-1)}(x)$ is found to have a primitive function of $f^{(\alpha)}(x)$, so $f^{(\alpha)}(x)$ is also called the complex order integral of $f(x)$ if $\operatorname{Re} \alpha < 0$. After that, the meaning of $f^{(\alpha)}(x)$ for $f(x) \in D'(R^1)$ is defined. Finally, a new kind of equation $f^{(\alpha)}(x) - G(\alpha) \cdot f(x) = 0$ (named “calculus equation of complex order”) is considered and its solution is given in section 3.

Key words para-derivative of complex order; complex order integral; calculus equation of complex