

鲁棒控制系统的正规矩阵设计法

易宜连

(电子与信息工程系)

摘 要 本文对多输入—多输出(MIMO)鲁棒控制系统提出了一种采用状态反馈的正规矩阵设计方法。

关键词 鲁棒控制;正规矩阵;状态反馈

分类号 TP 13

0 引 言

控制系统的设计者在使用控制理论设计控制器时,是假定了原系统的数学模型是精确的。然而,事实并非如此。往往由于种种原因,在考虑影响系统的因素时,只顾及到其主要因素,而略去了某些次要因素,从而得到的数学模型是近似的。尤其是当系统的工作环境发生变化或者受到扰动时,其参数就会发生某些变化,有时这种变化是显著的。这可能会危及到系统赖以生存的稳定性,或者系统性能远离额定要求。现代控制系统对稳定性及性能都提出了鲁棒性要求,一个没有足够鲁棒性的控制系统是没有实用价值的。一个系统的稳定性及其性能指标主要取决于系统的特征值情况。如果系统的系数矩阵的特征值对其元的变化不敏感,那么就可以说系统具有较强的鲁棒性。根据矩阵理论可知,正规矩阵的特征值对其元的变化最不敏感,或者说它的条件数最小。由此,便产生了鲁棒控制器的正规矩阵设计方法。文献[1]研究了如何设计闭环系统使其系数矩阵的条件数尽量接近最小。文献[2]研究了在频域中使开环传递函数矩阵成为正规矩阵的控制器的设计方法,并证明了该法与 H^∞ 设计法具有同样好的性能。而本文则是研究在时域内采用状态反馈构成闭环系统,使其系数矩阵成为正规矩阵的设计方法。

1 状态反馈矩阵 K 参数化—— K 为正交矩阵 Q 的函数

1.1 问题的提出

设线性定常 MIMO 能控系统为

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \quad (1)$$

式中状态向量 $X(t) \in R^n$, 输入向量 $U(t) \in R^r$ 。系数矩阵 $A \in R^{n \times n}$, 输入矩阵 $B \in R^{n \times r}$, 不失一般性,假定 $\text{rank}[B] = r$ 。采用状态反馈

$$U(t) = -KX(t), \quad (2)$$

式中 K 为反馈矩阵, $K \in R^{r \times n}$ 。由它构成的闭环系统

$$\dot{X}(t) = (A - BK)X(t), \quad (3)$$

具有给定的特征值, 且系数矩阵 $(A - BK)$ 为正规矩阵。

1.2 引理^[3]

设 n 阶实矩阵 A 的实特征值为 $\lambda_{s+1}, \lambda_{s+2}, \dots, \lambda_{s+K}$ 。复共轭特征值有 S 对, 为 $a_1 \pm ib_1, a_2 \pm ib_2, \dots, a_s \pm ib_s$ ($2S + K = n$)。则 A 是实正规矩阵的充分必要条件是存在 n 阶正交矩阵 Q , 使得

$$Q^T A Q = \text{diag}(H_1, H_2, \dots, H_S, \lambda_{s+1}, \dots, \lambda_{s+K}). \quad (4)$$

式中 $H_j = \begin{bmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{bmatrix}$ ($j = 1, 2, \dots, S$), 引理的证明参看文献[3]。

1.3 两个定理

定理 1 已知能控矩阵对 (A, B) 和一组期望的特征值 $\{\lambda^* = a_1^* + ib_1^*, \lambda^* = a_1^* - ib_1^*, \dots, \lambda_{s-1}^* = a_s^* + ib_s^*, \lambda_s^* = a_s^* - ib_s^*, \lambda_{s+1}^*, \dots, \lambda_{s+K}^*\}$ ($2S + K = n$)。

令 $F = \text{diag}(H_1, H_2, \dots, H_S, \lambda_{s+1}^*, \dots, \lambda_{s+K}^*)$,

式中 $H_j = \begin{bmatrix} a_j^* & b_j^* \\ -b_j^* & a_j^* \end{bmatrix}$ ($j = 1, 2, \dots, S$)

任意给定一个正交矩阵 $Q \in R^{n \times n}$, 若矩阵方程

$$A Q - Q F = B K \quad (5)$$

的解 $K \in R^{r \times n}$ 存在, 则状态反馈矩阵

$$K = K Q^{-1}. \quad (6)$$

由它构成的闭环系统

$$\dot{X}(t) = (A - BK)X(t)$$

具有期望的特征值, 且 $(A - BK)$ 为正规矩阵。

证明 由式(5)得知, 若其解 K 存在, 则

$$Q F = A Q - B K. \quad (7)$$

$\because Q$ 为正交矩阵, 其逆 Q^{-1} 必存在。用 Q^{-1} 右乘式(7)两边, 得 $Q F Q^{-1} = A - B K Q^{-1}$ 。

令 $K = K Q^{-1}$ 代入上式得

$$Q F Q^{-1} = A - B K, \quad (8)$$

用 Q^{-1} 、 Q 分别左、右乘式(8)两边得 $F = Q^{-1}(A - B K) Q$ 。

$\because Q$ 为正交矩阵, $\therefore Q^{-1} = Q^T$ 。上式变为 $F = Q^T(A - B K) Q$ 。

由引理可知, 当 $K = K Q^{-1}$ 时, $A - B K$ 具有期望特征值, 且 $A - B K$ 为正规矩阵。证毕。

令 $K = [K_1, K_2, \dots, K_n]$, $A Q - Q F = [h_1, h_2, \dots, h_n]$, 由方程(5)得

$$B[K_1, K_2, \dots, K_n] = [h_1, h_2, \dots, h_n]。或 \quad \begin{cases} B K_1 = h_1, \\ B K_2 = h_2, \\ \vdots \\ B K_n = h_n. \end{cases} \quad (9)$$

定理 2 矩阵方程 $AQ - QF = BK$, 当 A, Q, F, B 均为已知时, K 为有解的充分必要条件是: 方程组 (9) 中 $\text{rank}[B : h_i] = \text{rank}[B] = r \quad (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

证明 显然。由方程 (6) 可知, 状态反馈矩阵 K 是正交矩阵 Q 的函数。

2 正规矩阵设计法的计算程序

由上节讨论的结果, 可给出以下正规矩阵设计法的计算程序。

A 步 由给定的期望特征值, 令 $F = \text{diag}[H_1, H_2, \dots, H_s, \lambda_{s+1}^*, \dots, \lambda_{s+k}^*]$

B 步 任意选定正交矩阵 Q

C 步 求 K 。若方程组 (9) 中 $\text{rank}[B : h_i] = \text{rank}[B] = r \quad i = 1, 2, \dots, n$ 便可求出 K , 然后进行下一步。否则, 返回到 **B** 步, 重复以上计算。

D 步 求状态反馈阵 K 。 $K = KQ^{-1}$ 。

3 算 例

已知能控矩阵对 (A, B)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}。$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i, \quad \lambda^* = -2。$$

计算反馈矩阵 K , 使 $A - BK$ 具有给定特征值, 且 $A - BK$ 为正规矩阵。

解 按计算程序, 最后选定正交矩阵为 $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$

求得 $K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = KQ^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}。$

验证 $A - BK = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 为正规矩阵, 且具有期望特征值。

4 结 论

本文对 MIMO 线性定常系统, 利用正规矩阵的特征值对其元的变化不敏感的特征, 提出了鲁棒控制系统的正规矩阵设计方法, 该法在控制工程设计中具有一定的实践意义。使用该法求得的状态反馈矩阵 K , 既能使由它构成的闭环系统具有期望的特征值, 又能使系统的系数矩阵 $A - BK$ 为正规矩阵, 从而保证了系统具有较强的鲁棒性。

鉴于正交矩阵 Q 选择的任意性, 导出选择 Q 的具体规律或准则, 以保证在有限的循环次

数内所选择的 Q , 既能满足定理 2, 又能使 K 的范数为最小, 这是一个很复杂的问题, 需作进一步研究。

参 考 文 献

- 1 Kautsky J., Nichols N. and Vandooren P. Robust Pole Assignment in Linear state Feedback. Int. J. Control, 1985; 41(5) :1129~1155
- 2 张霖, 吴麒, 高黛陵。设计多变量鲁棒控制系统的正规矩阵方法。自动化学报, 1994, 20(2) : 138~145
- 3 王朝瑞, 史荣昌。矩阵分析。北京: 北京理工大学出版社, 1989

The Normal Matrix Design Approach for Robust Control System

Yi Yilian

(Electronic and Information Engineering Department)

Abstract In the paper a normal matrix design approach for MIMO robust control system is proposed by using state feedback.

Key words robust control; normal matrix; state feedback