

关于并图的 niche 数^{*}

邓 毅 雄

(基础课部)

摘 要 研究了并图的 niche 数,对 niche 数小于等于 2 的图的并图的 niche 数进行了详细讨论,并由此获得若干重要并图的 niche 数.

关键词 图;并图;niche 图;niche 数

分类号 O157.5

0 引 言

Niche 图是文献[1]于 1989 年才提出的一类新图类,它的研究起源于对生态问题的探讨,研究某些重要图类的 niche 数,无论在理论上还是在实践上都具有重要意义.在文献[2~3]中,研究了圈并图的 niche 数,本文的目的在于对一般并图的 niche 数进行研究,并由此得到某些重要并图的 niche 数.

设 $G = (V, E)$ 是简单无向图,若存在无圈弱连通的有向图 $D = (V, A)$,使得对任意点 $x, y \in V$,当且仅当存在弧 $[x, z], [y, z] \in A$ 或 $[z, x], [z, y] \in A$ 时, $xy \in E$,则称 G 为 D 对应的 niche 图,简称 G 是 niche 图.设 I_k 是 k 个孤立点的集,数 $n(G) = \min \{k | G \cup I_k \text{ 是 niche 图} \}$ 称为图 G 的 niche 数.若对任意整数 $k \geq 0$, $G \cup I_k$ 都不是 niche 图,则称 G 不存在有限 niche 数,记为 $n(G) = \infty$,今后我们总认为有向图 D 是弱连通的,且 $od(v)$ 、 $id(v)$ 分别表示 v 在 D 中的出度与入度.

设 $G \cup I_k$ 是无圈有向图 D 对应的 niche 图,若对任意的以 $G \cup I_k$ 为 niche 图的有向图 D' ,均有 $k \geq k$,则称 D 是关于 G 的 niche 最小有向图.

1 主要结果

到目前为止,在图的 niche 数研究中,仅发现 niche 数为 0, 1, 2, 或 ∞ 的图,而 niche 数为有限且大于或等于 3 的图至今仍未发现.下面我们仅讨论 niche 数小于或等于 2 的图之并图的 niche 数.

在文献 [2] 中, 已经证明: 若 $n(G_i) \leq 2 (i=1, 2, \dots, r)$, 则 $n(\bigcup_{i=1}^r G_i) \leq 2$.

由 niche 图定义易知:

引理 1^[2] 若 D 是无圈有向图, 则在 D 中存在点 $u, v \in V$, 使 $od(u) = 0, id(v) = 0$.

引理 2 若 G 是 D 对应的 niche 图, D' 是改变 D 的所有弧的方向所得到的有向图, 则 G 也是 D' 对应的 niche 图.

引理 3^[2] 若 $G \cup I_k$ 的 niche 最小有向图是 D , $x \in I_k$, 则在 D 中 $od(x) = 0$ 或 $id(x) = 0$.

下面, 利用上述引理, 证明我们的主要结论.

定理 1 若 $n(G_i) = 0 (i=1, 2, \dots, r)$, 则 $n(\bigcup_{i=1}^r G_i) = 0$.

证明 这只要考虑 $r=2$ 的情形即可. 设 G_1, G_2 的 niche 最小有向图分别是 D_1, D_2 , 由引理 1~2, 不妨设 u 是 D_1 的零出度点, v 是 D_2 的零入度点, 即 $od(u) = 0, id(v) = 0$. 由于 D_1, D_2 是无圈的, 那么在 u, v 之间增加弧 $[u, v]$ 所得之图 D' 也是无圈的, 且显然 $G_1 \cup G_2$ 是 D' 对应的 niche 图, 即 $G_1 \cup G_2$ 为 niche 图, $n(G_1 \cup G_2) = 0$.

定理 2 若 $n(G_1) = 0, n(G_2) = 1$, 则 $n(G_1 \cup G_2) = 0$.

证明 设 G_1 的 niche 最小有向图为 D_1 , 由引理 1~2, 不妨设 $u \in V(G_1)$, 使在 D_1 中 $id(u) = 0$. 设 $G_2 \cup \{x\}$ 的 niche 最小有向图为 D_2 , 由引理 2~3, 不妨设 $od(x) = 0$. 如图 1 所示, 由于 D_1, D_2 是无圈的, 当我们将 u 与 x 等同时, 所得有向图 D 仍是无圈的, 且显然 $G_1 \cup G_2$ 是 D 对应的 niche 图, 故 $n(G_1 \cup G_2) = 0$.

定理 3 若 $n(G_i) = 1, (i=1, 2)$, 则 $n(G_1 \cup G_2) = 0$.

证明 设 $G_1 \cup \{x\}, G_2 \cup \{y\}$ 的 niche 最小有向图分别是 D_1, D_2 , 由引理 2~3, 不妨设 $id(x) = 0, od(y) = 0$, 类似图 1 所示, 将点 x, y 等同时所得之图 D' 仍是无圈的, 且 $G_1 \cup G_2 \cup \{x\}$ 是 D' 对应的 niche 图. 又

由于点 $x=y$ 是 $G_1 \cup G_2 \cup \{x\}$ 中的孤立点, 且 $id(x) > 0, od(x) > 0$, 由引理 3 可知, D' 不是 G 的 niche 最小有向图, 故存在无圈有向图 D'' , 使 $G_1 \cup G_2$ 是 D'' 对应的 niche 图, 即 $n(G_1 \cup G_2) = 0$.

综合定理 2~3, 一般我们有

定理 4 若 $n(G_i) \leq 1, (i=1, 2, \dots, r)$, 则 $n(\bigcup_{i=1}^r G_i) = 0$.

定理 5 若 $n(G_1) \leq 1, n(G_2) = 2$, 则 $n(G_1 \cup G_2) \leq 1$.

证明 当 $n(G_1) = 0, n(G_2) = 2$ 时, 设 G_1 的 niche 最小有向图为 D_1 , $G_2 \cup \{x, y\}$ 的 niche 最小有向图为 D_2 . 不妨设对 $u \in V(G_1)$, $id(u) = 0$, 而 $od(x) = 0$. 类似地, 等同 u 与 x 所得之图 D 仍是无圈的, 且 $G_1 \cup G_2 \cup \{y\}$ 是 D 对应的 niche 图, 从而 $n(G_1 \cup G_2) \leq 1$.

1. 中国知网 <https://www.cnki.net>

当 $n(G_1) = 1, n(G_2) = 2$ 时, 设 $G_1 \cup \{x\}, G_2 \cup \{x, y\}$ 的 niche 最小有向图分别为

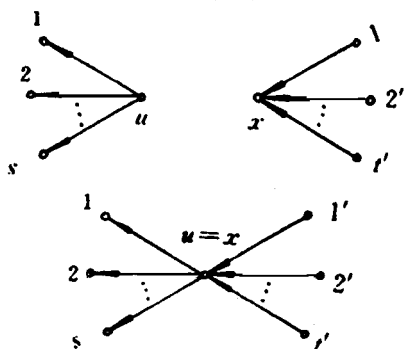


图 1

D_1 、 D_2 , 不妨设 $id(z) = 0$, $od(x) = 0$, 则等同 z 与 x 所得之图 D 仍是无圈的, 且孤立点 $z = x$ 的出入度均大于零, 由引理 3 知 D 不是 $G_1 \cup G_2$ 的 niche 最小有向图, 故 $n(G_1 \cup G_2) \leq 1$.

综合定理 4~5, 有

定理 6 若 $n(G_1) \leq 1$, $n(G_i) \leq 2$ ($i=2, \dots, r$), 则 $n(G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_r) \leq 1$. ($r \geq 2$).

作为以上定理的推论, 下面我们给出若干重要并图的 niche 数.

由于完全图 K_n 有 $n(K_n) = 1$, 而对道路 P_n 有: $n(P_2) = 1$, $n(P_n) = 0$, ($n \geq 3$), 则有以下推论

推论 1 $n(K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup \dots \cup K_{n_r}) = 0$. ($r \geq 2$)

推论 2 路之并 $P_{n_1} \cup P_{n_2} \cup \dots \cup P_{n_r}$ 是 niche 图, 即 $n(P_{n_1} \cup P_{n_2} \cup \dots \cup P_{n_r}) = 0$ ($n_i \geq 2$, $i=1, 2, \dots, r$).

引理 4^[1] 当 $n=3, 8$ 时, $n(C_n) = 1$; 当 $n=4, 5, 6$ 时, $n(C_n) = 2$; 当 $n=7$ 或 $n \geq 9$ 时, $n(C_n) = 0$.

引理 5 当 $n=4, 5, 6$ 时, $n(P_3 \cup C_n) = 0$.

证明 如图 2 所示, 设 $V(P_3) = \{u_1, u_2, u_3\}$, $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. 当 $n=4$ 时, 取 $A = \{[u_i, v_i], [u_i, v_{i+1}], i=1, 2, 3; [v_1, u_2], [v_4, u_2]\}$; 当 $n=5$ 时, 取 $A = \{[u_i, v_i], [u_i, v_{i+1}], i=1, 2, 3; [v_1, u_2], [v_5, u_2], [v_4, u_1], [v_5, u_1]\}$; 当 $n=6$ 时, 取 $A = \{[u_i, v_i], [u_i, v_{i+1}], i=1, 2, 3; [v_4, v_5], [v_4, v_6], [v_1, u_2], [v_6, u_2]\}$, 则 $D = (V, A)$ 是无圈的, 且 $P_3 \cup C_n$ ($n=4, 5, 6$) 是 D 对应的 niche 图.

引理 6 当 $m \geq 4$, $n=4, 5, 6$ 时, $n(P_m \cup C_n) = 0$.

证明 当 $m=n$ 时, 如图 3 (1) 所示, 取 $A = \{[u_i, v_i], [u_i, v_{i+1}], i=1, 2, \dots, n-1; [u_n, v_n], [v_1, u_2], [v_2, u_2]\}$, 则 $D = (V, A)$ 是无圈的, 且 $P_n \cup C_n$ 为 D 对应的 niche 图.

当 $m \geq n+1$ 时, 如图 3 (2) 所示, 取 $A = \{[u_i, v_i], [u_i, v_{i+1}], i=1, 2, \dots, n-1; [u_j, v_j], [u_{j+2}, u_{j+1}], j=n-1, n, \dots, m-2; [v_1, u_2], [v_n, u_2]\}$, 则 $D = (V, A)$ 是无圈的, 且 $P_m \cup C_n$ 为 D 对应的 niche 图.

另外当 $(m, n) = (4, 5), (4, 6), (5, 6)$ 时, 易于验证 $n(P_m \cup C_n) = 0$.

利用引理 4~6 及定理 1~4, 有

推论 3 (1) 当 $n = (4, 5, 6)$ 时, $n(P_2 \cup C_n) \leq 1$.

中国知网 (2) 当 $(m, n) = (2, 4), (2, 5), (2, 6)$ 时, $n(P_m \cup C_n) = 0$.

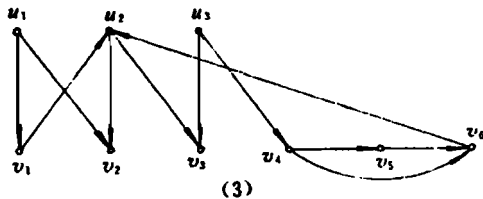
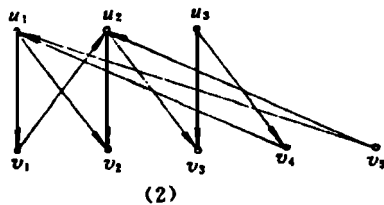
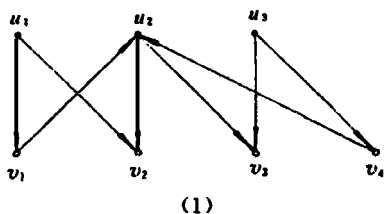


图 2

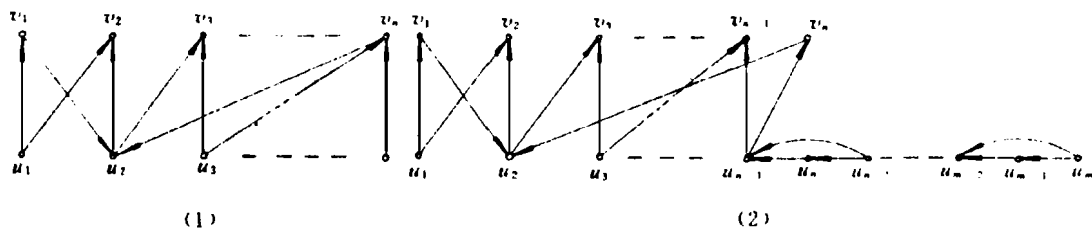


图 3

我们也注意到, 利用定理 1~4 及引理 4, 只要讨论几个特殊圈并的 niche 数, 就可得到文献 [3] 花了该文绝大部分篇幅证明的主要结论: 当 $(m, n) \neq (4, 5), (4, 6), (4, 7)$ 时, $n(C_m \cup C_n) = 0$; 当 $(m, n) = (4, 5), (4, 6)$ 或 $(4, 7)$ 时, $n(C_m \cup C_n) \leq 1$. 利用本文定理, 我们也可类似考虑多个圈并的 niche 数. 下面我们给出三个圈并的 niche 数, 至于更多圈并的情况可类似讨论.

显然当 $m, n, k \neq 4, 5, 6$ 时, $n(C_m \cup C_n \cup C_k) = 0$. 当 $m = 4, 5, 6; n, k \neq 4, 5, 6$ 时, 借助文献 [3] 中的图 8~10, 易于得到此时亦有 $n(C_m \cup C_n \cup C_k) = 0$. 而由图 4 (1) ~

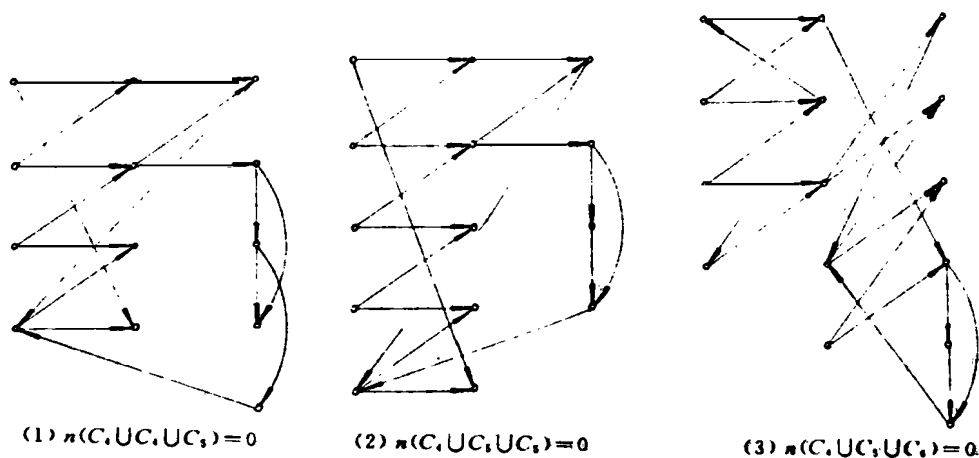


图 4

(3) 知, $n(C_4 \cup C_4 \cup C_5) = 0, n(C_4 \cup C_5 \cup C_5) = 0, n(C_4 \cup C_5 \cup C_6) = 0$. 类似图 4 (1) ~ (2) 可得 $n(C_4 \cup C_6 \cup C_6) = n(C_5 \cup C_5 \cup C_6) = n(C_5 \cup C_6 \cup C_6) = n(C_4 \cup C_4 \cup C_6) = 0$. 再注意到文献 [3] 的定理 5: $n(mC_n) = 0 (m \geq 2)$. 因此有以下推论

推论 4 任意三个圈之并图是 niche 图, 即 $n(C_m \cup C_n \cup C_k) = 0. (m, n, k \geq 3)$.

由于任意两圈之并的 niche 数小于或等于 1, 由定理 4, 有当 r 为偶数时, $n(C_{n1} \cup C_{n2} \cup \dots \cup C_{nr}) = 0. (r \geq 4)$. 而当 r 为奇数时 ($r \geq 5$), 由于三个圈之并为 niche 图, 而两圈之并图的 niche 数小于或等于 1, 由定理 4, 有五圈之并也是 niche 图, 进一步对一切 $r (r \geq 3)$ 的奇数, 均有类似结论, 因此

推论 任意三个以上圈之并图均为 niche 图.

总之,加强和完善国有资产管理、提高其使用效益是关系到我们国家、我们职工个人的切身利益,是当前改革中的头等大事。为此,我们应从理论和实践上加强这方面的研究探讨;同时,注重从我们身边的点点滴滴工作做起,以期从根本上完善资产管理,并实现其经济效益、经济增长方式的彻底转变。

参 考 文 献

1 刘国良.关于国有资产体制改革的意见.企业管理,1995,(3):33 ~ 35
2 杨秋林.论国有资产评估的法制化.企业经济,1995,(1) 21 ~ 22
3 樊海山.企业国有资产流失不容忽视.经济管理,1994,174(6):26 ~ 27
4 狄娜.加强国有资产监管已势在必行.企业管理,1994,(2):29 ~ 30
5 董发来,孟昭元.国有企业资产管理必须适应市场经济的要求.经营与管理,1995,129(3):6 ~ 7
6 李葆坤,加强综合治理,保护国有资产.经营与管理,1995,128(2):13 ~ 32

(上接第 72 页)

参 考 文 献

1 Cable C, Jones K F, Lundgren J R, Seager S. Niche Graphs. Discrete Appl. Math. 1989, 23(3), 231 ~ 241
2 Bowser S, Cable C. Some Recent Results on Niche Graphs. Discrete Appl. Math. 1991, 30(2 ~ 3), 101 ~ 108
3 唐廷载.圈并图 $C_m \cup C_n$ 的 niche 数.纯粹数学与应用数学,1994,(专刊):67 ~ 73

Niche Number on Union of Graphs

Deng Yixiong

(Basic Courses Department)

Abstract This paper studies the niche number of disjoint union of graphs and presents some theorems and the niche number of important union graphs.
Key words graph; union of graphs; Niche number; Niche graphs