

多自由度振动力学模型直接构造 运动微分方程系数矩阵的方法

钟 越

(机械工程系)

摘 要 讨论用直接法建立多自由度振动系统运动微分方程矩阵式中各系数矩阵的方法和步骤^[1]。

关键词 多自由度振动系统;微分方程;系数矩阵

分类号 TH 113 .1

0 引 言

多数教科书在建立多自由度振动系统运动微分方程时,都是利用传统的牛顿运动定律法、拉格朗日法或影响系数法等^[1]这几种方法在理论上虽然明确无误,但在运算过程中比较繁琐,容易出错,且一旦出现错误,检查订正也较麻烦,特别是对于有分支机构的比较复杂的振动系统更是如此^[1]。

本文根据用传统方法获得的一般结论,用直接法找出其存在的规律性,建立运动微分方程的各系数矩阵^[1]这种方法具有简单明了,不易出错,易于检查等优点,特别是对于具有较复杂分支机构的振动系统,更能体现优越性^[1]。

1 传统计算方法

图 1(a) 所示为具有 n 个质量的有限多自由度振动系统的力学模型^[1]图 1(b) 为其脱离体图^[1]。

按牛顿第二运动定律,可得到一组线性方程组

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 &= F_1(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - c_3 \dot{x}_3 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 - k_3 x_3 &= F_2(t) \\ &\dots \\ m_i \ddot{x}_i - c_i \dot{x}_{i-1} + (c_i + c_{i+1}) \dot{x}_i - c_{i+1} \dot{x}_{i+1} - k_i x_{i-1} + (k_i + k_{i+1}) x_i - k_{i+1} x_{i+1} &= F_i(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

收稿日期:1996-09-10^[1] 钟 越,男,1937年生,副教授^[1]

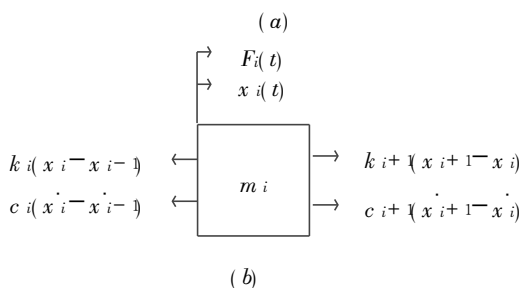
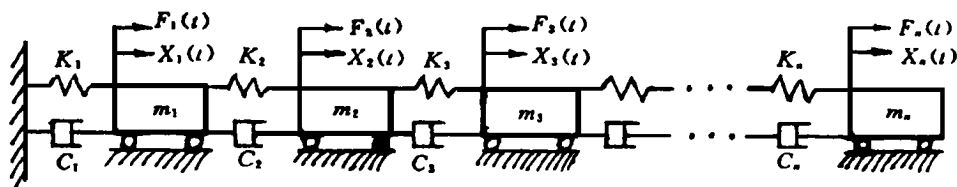


图 1

其矩阵表达式为

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{F(t)\} \quad (2)$$

式中 $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ 分别为系统的质量(或称惯性)矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵; $\{\ddot{x}\}$ 、 $\{\dot{x}\}$ 和 $\{x\}$ 分别为系统的加速度列阵、速度列阵和位移列阵; $\{F(t)\}$ 为激振力列阵^[3]

$[M]$ 、 $[C]$ 和 $[K]$ 的一般形式为

$$\left. \begin{aligned} [M] &= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & \cdots & m_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}, \\ [C] &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}, \\ [K] &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

将式(3)与式(1)对照可得

$$\begin{aligned}
 [M] &= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & \cdots & m_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^1 & & & & 0 \\ & m^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & m^n \end{bmatrix}, \\
 [C] &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & -c_3 & c_3 + c_4 & -c_4 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -c_{n-1} & c_{n-1} + c_n & -c_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & & -c_n & c_n + c_{n+1} \end{bmatrix}, \\
 [K] &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & \cdots & k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & & -k_n & k_n + k_{n+1} \end{bmatrix},
 \end{aligned} \quad (4)$$

上式亦可由影响系数法求得,显然,利用牛顿第二运动定律等法建立系统运动微分方程及列出各系数矩阵,比较麻烦,特别是对于具有较为复杂的分支机构系统,在运算中易于出错^[13]

2 用直接法确定系数矩阵

在式(4)中质量矩阵 $[M]$ 为对角阵,阻矩阵 $[C]$ 及刚度矩阵 $[K]$ 均为对称矩阵,现说明其规律^[13]

2.1 质量系统构成对角阵之条件

图2所示为一支承在二弹性元件 k_1, k_2 上的质量为 m 的刚性系统,在微振动范围内作平面运动,其质心 C 距二弹性元件的距离分别为 L_1 和 L_2 , J_0 为刚体通过质心并与与图面垂直的轴的转动惯量, $o-o$ 为其静平衡位置,设质心处作用有外力 F_e 及外力矩 T_e ,该系统为两自由度系统,现选取质心 C 至 $o-o$ 的距离 x_e 及转角 θ 为广义坐标如图2(a),应用平面运动微分方程得

$$\left. \begin{aligned} mx_e + k_1(x_e - l_1\theta) + k_2(x_e + l_2\theta) &= F_e, \\ J_e\ddot{\theta} - k_1l_1(x_e - l_1\theta) + k_2l_2(x_e + l_2\theta) &= T_e. \end{aligned} \right\}$$

经整理后得

$$\left. \begin{aligned} mx_c + (k_1 + k_2)x_c + (k_2l_2 - k_1l_1)\theta &= F_c, \\ J_c\theta + (k_2l_2 - k_1l_1)x_c + (k_2l_2^2 + k_1l_1^2)\theta &= T_c. \end{aligned} \right\}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_c \\ \theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2l_2 - k_1l_1 \\ k_2l_2 - k_1l_1 & k_2l_2^2 + k_1l_1^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_c \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_c \\ T_c \end{Bmatrix}.$$

由此知,质量系统构成对角阵^[13]

当广义坐标不取在质心 C 处而取在任一点 D 时,如图 2(b) 所示,同上述并利用 $k_1L_3 = k_2L_4$ 可得下列方程组

$$\left. \begin{aligned} mx_D + me\theta + (k_1 + k_2)x_D &= F_D, \\ mex_D + (J_c + me^2)\theta + (k_1l_3^2 + k_2l_4^2)\theta &= T_D. \end{aligned} \right\}$$

写成矩阵形式得

$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & J_c + me^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_D \\ \theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & k_1l_3^2 + k_2l_4^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_D \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_D \\ T_D \end{Bmatrix}.$$

此时,质量系统不能构成对角阵^[13]

由此可知,只有将系统各质量的质心作为广义坐标的原点,则惯性矩阵中与各行相对应的各质量才会构成对角阵 $[m_{ii}]$ ^[13]

2.2 刚度矩阵构成对称阵的规律

观察式(4),刚度矩阵构成对称阵有如下规律:

(1) 刚度矩阵中,其主对角线上各项的元素,由连接到相应质量 m_i 上的所有弹簧刚度之和

$$\sum_{i=1}^n k_{ii} \text{表示}^{[13]}$$

(2) 刚度矩阵中,非主对角线上的各非 0 项元素,由同时联接到相应质量 m_i 和 m_j 上的各弹簧的等效刚度且前面冠以“-”号表示,即 $k_e = - \sum_{j=1, j \neq i}^n k_{ij}$, 其在相应行中所处的列的位置与弹簧所联另一端质量 m_j 的序号相同^[13]

(3) 若弹簧的一端栓在固定的基础上,则此弹簧刚度只能出现在主对角线上^[13]

2.3 阻尼矩阵与刚度矩阵具有相同的构成规律

根据以上归纳的结果,可直接列出微分方程中各系数矩阵的计算步骤如下:

(a) 将广义坐标置于系统各质量的质心处,给系统各质量编号;给质量矩阵的行和列编号;行列的编号要与质量编号相对应,令质量矩阵中非主对角线上的全部元素为 0^[13]

(b) 在刚度矩阵中,把连接质量 m_i 的全部弹簧的刚度之和,放入与其相应的主对角线的各

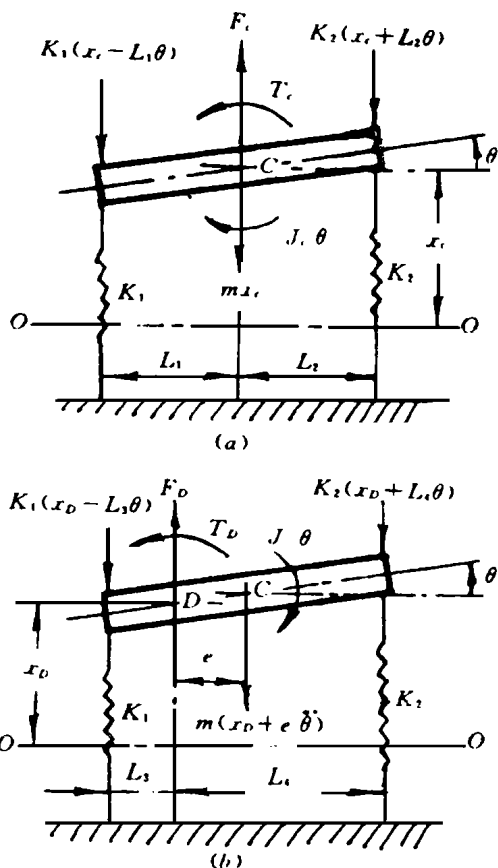


图 2

元素中^[13]

(c) 依次考虑各行, 将相应主对角线上元素的各个弹簧刚度(一端联在基础上的弹簧除外)取负号后写入相应的列中, 该列的序号与本弹簧另一端所联质量的编号相同^[13]考虑到矩阵的对称性, 只须先写出主对角线右上各项, 再利用对称性使矩阵完整^[13]

(d) 阻尼矩阵按刚度矩阵同样步骤进行^[13]

3 举 例

图3所示为一具有较复杂分支机构的阻尼多自由度系统, 按下述计算步骤^[13]

(1) 按步骤(a): 将坐标原点均选择在各质量的质心位置, 将质量块编号, 其质量矩阵为对角阵 $[m_{ii}]$ ^[13]

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & & & 0 \\ & m_2 & & \\ & & m_3 & \\ 0 & & & m_4 \end{bmatrix} \quad (13)$$

(2) 按步骤(b), (c) 和(d) 写出刚度矩阵和阻尼矩阵

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_6 + k_4 & -k_2 & -k_6 & -k_4 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ -k_6 & -k_3 & k_3 + k_6 + k_7 & 0 \\ -k_4 & 0 & 0 & k_4 + k_5 \end{bmatrix},$$

$$[C] = \begin{bmatrix} c_2 + c_6 + c_4 & -c_2 & -c_6 & -c_4 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 \\ -c_6 & -c_3 & c_3 + c_6 + c_7 & 0 \\ -c_4 & 0 & 0 & c_4 + c_5 \end{bmatrix} \quad (13)$$

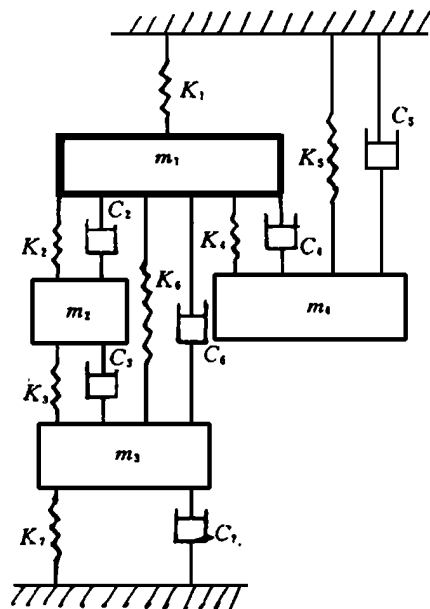


图3

4 结束语

当系统中 $[C] = 0, F(t) = 0$ 时, 将其代入矩阵表达式

(2) 中得

$$[M] \ddot{x} + [K] x = 0 \quad (13)$$

上式即为多自由度系统自由振动之运动微分方程, 当方程的解为

$$x = A e^{j\omega t} \text{ 时, 可得 } ([K] - \omega^2 [M]) A = 0.$$

要使上式对 A 有非0解, 则须有

$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0$ ^[13]此即为系统的频率方程, 将其展开后即可解得该多自由度系统的各阶固有频率 ω_i ($i = 1, 2, \dots$) 并进而求得相应的各阶固有振型 A_i ^[13]而式中的 $[K], [M]$ 等即可由上述“直接法”很方便的求得^[13]

(下转第23页)

- 5 刘 谦¹⁹传递过程原理¹⁹北京:高等教育出版社,1990
- 6 杨世铭¹⁹传热学¹⁹北京:人民教育出版社,1980
- 7 冯伯华等¹⁹化学工程手册(第四册)¹⁹北京:化学工业出版社,1989
- 8 桐荣良三¹⁹气流干燥装置¹⁹日刊工业新闻社,1960
- 9 化学工学学会(日)¹⁹化学工学便览(日)¹⁹丸善株式会社,1978

Investigation and Analysis of the Drying Process of the Bearing Dryer on Railway Trains

Wang Xiaoming

(Mechanical Engineering Department)

Abstract The main focus of this paper is put firstly on the investigation of the drying process of the bearing dryer on railway trains, secondly on the main factors which bring interference upon drying speed. Based on this, a new drying process approach is provided.

Key words bearing drying; drying process

(上接第18页)

参 考 文 献

- 1 骆振黄¹⁹工程振动导引¹⁹上海:上海交大出版社,1989.111~130
- 2 D. J 哈托¹⁹振动分析的矩阵计算机方法¹⁹北京:机械工业出版社,1982.57~79
- 3 季文美等¹⁹机械振动¹⁹北京:科学出版社,1985,182~238

The Method of Building Coefficient Matrix of Motion Differential Equation Directly by Using Multi-Degree-of-Vibration Mechanics Model

Zhong Yue

(Mechanical Engineering Department)

Abstract This paper discusses how to establish coefficient matrixes of motion differential equation of multi-degree-of-vibration system directly.

Key words multi-degree-of-vibration system; differential equation; coefficient matrix