

复合型裂纹应力与应力强度 因子分析的位移间断法

陈梦成 宋功河

(土木工程系)

摘 要 采用复变函数方法严格导出了复合型裂纹线上应力分布与位移间断的关系式,然后利用这些关系式和裂纹尖端端点的奇性分析方法,就得到了应力强度因子与位移间断之间的表达式^[1]。为了验证所有这些公式的正确性,文章最后给出了一个远端受均匀拉伸,内含一斜裂纹的无限大平面裂纹问题的算例,并与现有的封闭理论解作了比较,结果完全一致^[1]。

关键词 线弹性断裂力学;复合型裂纹;位移间断;应力;应力强度因子

分类号 O 346.1

0 引 言

在机械、结构物等制造和使用过程中,出现裂纹缺陷的情况下,对其进行安全性评价时,通常需要了解破坏参数——应力强度因子^[1]。在线弹性断裂力学范围内,应力强度因子可以通过裂纹线上的应力分布来计算^[1]。然而,由于结构内部所产生的残余应力复杂,加上有的结构形状又不规则,所以,要确切地对它们进行应力分析往往不是一件很容易的事情^[1]。另外,当裂纹产生时,会由于裂纹自身变形而导致应力释放^[1]。因此,要对在裂纹产生之前裂纹位置上的应力分布进行测定也是不太可能的^[1]。

近年来,用位移间断密度作为未知函数的 Cauchy 型奇异积分方程方法在分析裂纹问题当中备受人们的关注^[1~3]。^[1]假定我们能够通过实验手段测出位移间断的话,那么,用这种方法经过适当的变形后来估算裂纹线上的应力分布就显得非常有用^[1]。一般来说,平面裂纹问题通常是复合型裂纹问题,因此,我们的研究也就从这类问题开始^[1]。

本文将用复变函数方法导出复合型裂纹线上的应力分布与位移间断间的计算表达式,然后利用这些应力计算表达式和裂纹端点的性质^[1]推导相应的应力强度因子计算公式^[1]。文章最后将给出一个考核例,以证明本文方法的可行性^[1]。

1 理论分析

1.1 复合型裂纹线上的应力分布

对于平面问题的均质弹性体中的应力 σ_x 、 σ_y 和 σ_y 以及位移 u 和 v 可以用两个标准的 Muskhelishvili 复数势 $\Phi(z)$ 和 $\Psi(z)$ 来表示^[4]。然而,如果我们引入适当的势函数 $\Phi(z)$ 和 $\Psi(z)$, 使

$$\Phi(z) = \Phi(z), \quad \Psi(z) = \psi(z) = -\Phi(z) + \bar{\Phi}(z) - z\Phi(z), \quad (1)$$

那么,应力和位移分量就可单独用一个函数 $\Phi(z)$ 来表示,这样使我们的问题研究起来更为方便。用单独一个 $\Phi(z)$ 表示的应力场和位移场为

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\Phi(z) + \bar{\Phi}(z)], \quad (2)$$

$$\sigma_y - i\sigma_x = \Phi(z) + \bar{\Phi}(z) + (z - \bar{z})\bar{\Phi}'(z), \quad (3)$$

$$E \frac{\partial}{\partial x}(u + iv) = (1 + \nu)[\kappa\Phi(z) - \bar{\Phi}(z) - (z - \bar{z})\bar{\Phi}'(z)]. \quad (4)$$

这里 E 为 Young 模量, ν 为 Poisson 比, κ 可用下式表示

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & (\text{平面应变}) \\ (3 - \nu)/(1 + \nu) & (\text{平面应力}) \end{cases} \quad (5)$$

因此,根据式(3),当 $y \rightarrow 0^+$ ($z = x + iy$) 时,有

$$\sigma_y - i\sigma_x = \Phi^+(x) + \bar{\Phi}^-(x). \quad (6)$$

用同样的方法,由(4)式可得到如下式(7)和式(8):

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \right]^+ - \left[\frac{\partial}{\partial x} \right]^- = \frac{2}{E} [\Phi^+(x) - \bar{\Phi}^-(x) + \bar{\Phi}^-(x) - \bar{\Phi}^+(x)], \quad (7)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \right]^+ - \left[\frac{\partial}{\partial x} \right]^- = \frac{2}{iE} [\Phi^+(x) - \bar{\Phi}^-(x) + \bar{\Phi}^+(x) - \bar{\Phi}^-(x)], \quad (8)$$

其中 E 为

$$E = \begin{cases} E/(1 - \nu) & (\text{平面应变}) \\ E & (\text{平面应力}) \end{cases} \quad (9)$$

根据式(7)和式(8),消去 $\bar{\Phi}^+(z) - \bar{\Phi}^-(z)$, 得

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \right]^+ - \left[\frac{\partial}{\partial x} \right]^- + \frac{1}{i} \left[\left[\frac{\partial}{\partial x} \right]^+ - \left[\frac{\partial}{\partial x} \right]^- \right] = \frac{4}{iE} [\Phi^+(z) - \bar{\Phi}^-(z)]. \quad (10)$$

由于对应于 I 型和 II 型的位移间断分量 V 和 U 可以用裂纹上下面位移差来表示,即

$$V = v^+ - v^-, \quad U = u^+ - u^-. \quad (11)$$

式(11)的微分形式为

$$\frac{dV}{dx} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \right]^+ - \left[\frac{\partial}{\partial x} \right]^-, \quad \frac{dU}{dx} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \right]^+ - \left[\frac{\partial}{\partial x} \right]^-. \quad (12)$$

把式(12)代入式(9),可得下式

$$\left[\frac{dV}{dx} \right] + \frac{1}{i} \left[\frac{dU}{dx} \right] = \frac{4}{iE} [\Phi^+(z) - \bar{\Phi}^-(z)]. \quad (13)$$

为了得到式(6)和式(13)边值问题的解,可以使用下面 Cauchy 型 Plemelj 积分公式^[4]

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t) dt}{t - z}, \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} F^+(t) - F^-(t) &= g(t), \\ F^+(t) + F^-(t) &= \frac{1}{\pi} \int_L \frac{g(x)}{x-t} dx. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

这里 L 为沿裂纹面的积分路径, t 为沿 x 轴线上的点, $g(t)$ 为裂纹 L 上 t 点的边界值(13)假定式(6)和式(13)所得到的 $\Phi(x)$ 即为 $F(z)$ 定义在裂纹边界 L 上的边界值, 那么由式(15)得

$$\sigma_y - i\alpha_y = \frac{E'}{4\pi} \int_L \frac{(dV/dx)}{x-t} dx - \frac{iE'}{4\pi} \int_L \frac{(dU/dx)}{x-t} dx. \quad (16)$$

分离式(16)的实部和虚部, 就可得到下列形式的 σ_y 和 α_y

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y(t) &= \frac{E'}{4\pi} \int_L \frac{(dV/dx)}{x-t} dx, \\ \alpha_y(t) &= \frac{E'}{4\pi} \int_L \frac{(dU/dx)}{x-t} dx. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

利用 V 和 U 在裂纹尖端处为零的特点, 对式(17)进一步分部积分就有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y(t) &= \frac{E'}{4\pi} \int_L \frac{V}{(x-t)^2} dx, \\ \alpha_y(t) &= \frac{E'}{4\pi} \int_L \frac{U}{(x-t)^2} dx. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

由此可看出, 一旦给出 x 轴上沿复合型裂纹 L 的 I 型和 II 型位移间断分量 V 和 U , 那么裂纹线上的应力分布 $\sigma_y(t)$ 和 $\alpha_y(t)$ 就可以相互独立地计算出来(13)

1.2 I 型和 II 型应力强度因子

根据应力强度因子 k 的定义, 我们有如下表达式

$$k_I = \lim_{t \rightarrow a^+} \sqrt{2\pi(t-a)} \sigma_y(t), \quad (19)$$

$$k_{II} = \lim_{t \rightarrow a^+} \sqrt{2\pi(t-a)} \alpha_y(t). \quad (20)$$

当 $t \rightarrow a^+$ 时, $\sigma_y(t)$ 和 $\alpha_y(t)$ 表示在裂纹尖端处邻域内的应力场, 那么根据式(18)和裂纹尖端端点性质^[1], 有

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a^+} \sigma_y(t) &= \frac{E'}{8} \left\{ \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{V}{a-t} \right\} \left\{ \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{1}{t-a} \right\}, \\ \lim_{t \rightarrow a^+} \alpha_y(t) &= \frac{E'}{8} \left\{ \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{U}{a-t} \right\} \left\{ \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{1}{t-a} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

故应力强度因子与位移间断的关系为

$$\left. \begin{aligned} k_I &= -\frac{2\pi E'}{8} \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{V}{a-t}, \\ k_{II} &= -\frac{2\pi E'}{8} \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{U}{a-t}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

同样可导出裂纹尖端另一侧 k_I 和 k_{II} 的表达式, 它们与式(22)完全相同(13)至此, 复合型裂纹线上的应力分布和裂纹尖端的应力强度因子与位移间断之间的关系表达式已全部得到(13)

2 考核例

中国知网 <https://www.cnki.net>

为了验证前节式(18)和式(22)所获得的应力及应力强度因子计算表达式是否正确, 下面

以已有的理论封闭解斜裂纹问题^[5]为例进行考核(13)如图1所示,有一块无限板内含一倾角为 β 、长度为 $2a$ 的斜裂纹,并且在远端受到轴应力 $\bar{\sigma}_y = \sigma$ 和 $\bar{\sigma}_x = 0$ 的场合(13参考 Theocaris 和 Michopoulos^[6]的解法,我们可以导出与裂纹平行(x)方向和与裂纹垂直(y)方向的位移 u 和 v (13根据文献[4]有

$$2\mu(u + iv) = \kappa \int \Phi(z) dz - \int \bar{\Omega}(\bar{z}) d\bar{z} - \frac{(z - \bar{z})}{2} \overline{\Phi(z)}. \quad (23)$$

这里 $2\mu = E/(1 + \nu)$, κ 定义同前(13对于本文问题而言,复数势 $\Phi(z)$ 和 $\Omega(z)$ 具有如下形式^[4]

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{\sigma}{4} \frac{1 - e^{2i\beta}}{z^2 - a^2} z + \frac{\sigma}{4} e^{2i\beta}, \\ \Omega(z) &= \frac{\sigma}{4} \frac{1 - e^{2i\beta}}{z^2 - a^2} z - \frac{\sigma}{4} e^{2i\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

把式(24)代入式(23),并分离实部和虚部,就得到 u 和 v ,即

$$\begin{aligned} 2u &= \sigma \kappa - 1 \left\{ \frac{r_1 r_2 (1 - \cos 2\beta) \cos[(\theta + \theta)/2] - r \sin \theta \sin 2\beta}{4} + \right. \\ &\quad \left. \sigma \kappa + 1 \left\{ \frac{r_1 r_2 \sin 2\beta \sin[(\theta + \theta)/2] + r \cos \theta \cos 2\beta}{4} + \right. \right. \\ &\quad \left. \sigma^2 \frac{r_1 r_2 \sin \theta \sin 2\beta \cos[\theta - (\theta + \theta)/2] + (1 - \cos 2\beta) \cdot \sin[\theta - (\theta + \theta)/2]}{2} - \sigma \sin 2\beta \sin \theta/2, \right. \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} 2v &= \sigma \kappa + 1 \left\{ \frac{r_1 r_2 (1 - \cos 2\beta) \sin[(\theta + \theta)/2] + r \cos \theta \sin 2\beta}{4} - \right. \\ &\quad \left. \sigma \kappa - 1 \left\{ \frac{r_1 r_2 \sin 2\beta \cos[(\theta + \theta)/2] - r \sin \theta \cos 2\beta}{4} - \right. \right. \\ &\quad \left. \sigma^2 \frac{r_1 r_2 \sin \theta \sin 2\beta \sin[\theta - (\theta + \theta)/2] + (1 - \cos 2\beta) \cdot \cos[\theta - (\theta + \theta)/2]}{2} - \sigma \sin \theta \cos 2\beta/2. \right. \end{aligned} \quad (26)$$

当点在裂纹面上岸时 $\theta = \theta$, $\theta = \theta$, $\theta = 180^\circ - \theta$;当点在裂纹面下岸时 $\theta = 360^\circ - \theta$, $\theta = 360^\circ - \theta$, $\theta = 180^\circ + \theta$ (13如果均取 $\theta \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow 0$ 和 $\theta \rightarrow 0$ 的话,那么我们就得到了裂纹面上下表面的位移,即有

$$\left. \begin{aligned} u^\pm &= \frac{\sigma}{E} (x \cos 2\beta \pm \sqrt{a^2 - x^2} \sin 2\beta), \\ v^\pm &= \frac{\sigma}{E} [x \sin 2\beta \pm \sqrt{a^2 - x^2} (1 - \cos 2\beta)]. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

故裂纹面上的位移间断,由式(11)和式(27)得

$$v = \frac{2\sigma}{E} (1 - \cos 2\beta) \sqrt{a^2 - x^2}, \quad U = \frac{2\sigma}{E} \sin 2\beta \sqrt{a^2 - x^2}, \quad (28)$$

把式(28)代入式(18),并利用围道积分和留数定理,注意到

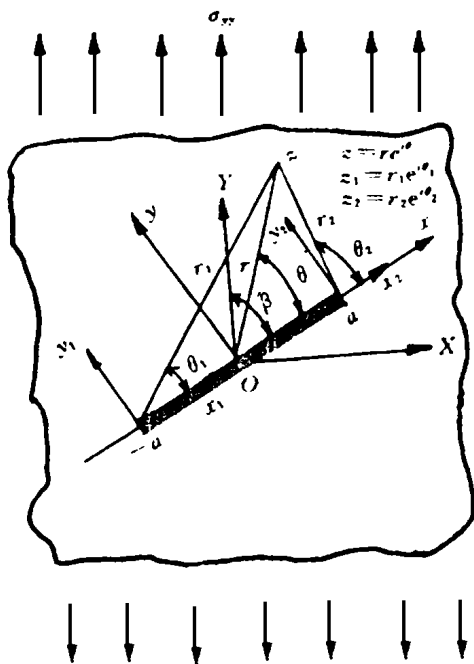


图1 远端受均匀拉伸的斜裂纹板

$$\int_a^t \frac{\overline{a^2 - x^2}}{(x-t)^2} dx = -\pi \quad (29)$$

那么沿裂纹线上分布的应力就为

$$\sigma_y = -\sigma \sin^2 \beta, \quad \sigma_x = -\sigma \sin \beta \cos \beta \quad (30)$$

这完全和产生裂纹之前裂纹位置上的应力状态相同,只不过这里符号相反,这也符合线弹性范围内的叠加原理^[13]因而本文有关裂纹线上应力分布的计算公式是完全正确的^[13]

最后,来计算一下应力强度因子^[13]把式(28)代入式(22)得

$$k_{\perp} = \sigma \sqrt{\pi} \sin^2 \beta, \quad k_{\parallel} = \sigma \sqrt{\pi} \sin \beta \cos \beta \quad (31)$$

式(31)正好完全和理论解^[5]一致^[13]

3 结束语

本文对复合型裂纹线上应力分布与裂纹尖端应力强度因子的评价方法,从裂纹面上的位移间断这个角度,作了一些基础性研究工作,得到一些计算公式^[13]用这些公式计算所得到的结果和现有的理论解作了比较,二者结果完全一致,这同时证明了这些公式的正确性^[13]本文的公式具有一定的实用价值^[13]

参 考 文 献

- 1 Erdogan F. Mixed boundary value problems in mechanics. Mechanics Today, 4(1978), 1~85
- 2 Kaya AC and Erdogan F. On the solution of equations with strongly singular kernels. Q. Appl. Math., 45(1987), 105~122
- 3 野田, 梅木. 超越特异积分方程式法によるき裂の应力扩大係数の解析につひて. 机论, 55(1989), 2521~2526
- 4 Muskhelishvili NI. 数学弹性力学的几个基本问题. 北京: 科学出版社, 1958
- 5 中国航空研究院. 应力强度因子手册. 北京: 科学出版社, 1993
- 6 Theocaris PS and Michopoulos JG. A closed form solution of a slant crack under biaxial loading. 17(1983), 97~123

(下转第54页)

参 考 文 献

- 1 赵保经,朱介炎¹简明 CMOS 集成电路手册¹上海:上海科学技术出版社,1986
- 2 忻兵,黄¹句石,陈宝康¹CMOS 集成电路及应用¹北京:中国铁道出版社,1988

Detecting 3-phase Sequence by means of Trigger Circuit

Liu Fuzhi

(Basic Courses Department)

Abstract The detector adopts special Saple circuits which meet the requirments of cuos circuits to input circuits, thus ensuring the safety of the core lamination and making the circuits practical and reliable.

Key words detecting; phase sequence

(上接第45页)

A Displacement Dislocation Method for Evaluating Stresses and Stress Intensity Factors along a Mixed-Mode Crack

Chen Mengcheng Song Gonghe

(Civil Engineering Department)

Abstract In this paper the relationship between stresses and displacement dislocations along a mixed-mode crack were strictly obtained by using complex function theory. Then the expressions for stress intensity factors were acquired with the aid of the relationships and singularity method around the crack tip. To verify all formula derived, this paper finally presented an illustration of an infinite plate containing a slant crack under uniaxial uniform loading. The results obtained with the present formulae were theoretically compared with available closed-type solutions. It was shown they are quite equal.

Key words line-elastic fracture mechanics; mixed-mode crack; displacement dislocation; stress; stress intensity factor