也论双进组合三角在不定积分中的应用

周学松　周尚超

(基础课部)

摘　要　对文献[1]、[2]、[3]中研究的不定积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^m x\cos^n x}$ (m、n 为奇正整数)给出一个简单方法,并利用该法解决了文献[1]、[2]、[3]中未解决的不定积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^m x\cos^n x}$ (m、n 为偶正整数)的显解公式问题⒀最后利用文献[2]中的定理2,解决了文献[1]、[2]、[3]中未解决的不定积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^m x\cos^n x}$ (m、n 为奇、偶性互异的正整数)的显解公式问题⒀从而完全解决了 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^m x\cos^n x}$ 的显解公式问题⒀

关键词　双进组合三角;不定积分
分类号　O 157

文献[1]作者在文献[1]、[2]中指出,形如

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^m x\cos^n x}\quad (m、n\text{ 为正整数})\tag{1}$$

的不定积分,虽已有递推公式,但公式繁且不易记忆,于是利用双进组合三角得到其主要结果之一:

定理1[1,2]

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^{2n+1}x\cos^{2n+1}x} = {}& \frac{C_n^0\sin x}{\cos^{2n+1}x}+\frac{C_{n+1}^1\sin x}{\cos^{2n-1}x}+\frac{C_{n+2}^2\sin x}{\cos^{2n-3}x}+\cdots+\frac{C_{2n-1}^{n-1}\sin x}{\cos^3 x}+\\ & \frac{C_{2n}^n\sin x}{\cos x}+\frac{C_{2n}^n\cos x}{\sin x}+\frac{C_{2n-1}^{n-1}\cos x}{\sin^3 x}+\cdots+\frac{C_{n+2}^2\cos x}{\sin^{2n-3}x}+\\ & \frac{C_{n+1}^1\cos x}{\sin^{2n-1}x}+\frac{C_n^0\cos x}{\sin^{2n+1}x},\qquad n=0,1,2,\cdots\end{aligned}\tag{2}$$

$$\frac{1}{\sin^{2n+2}x\cos^{2n+2}x}=\sum_{i=0}^{n}\frac{C_{n+i}^i}{\sin^{2n-2i+2}x}+\sum_{i=0}^{n}\frac{C_{n+i}^i}{\cos^{2n-2i+2}x}⒀\tag{3}$$

从而解决了 m,n 为奇正整数时,式(1)的显解公式问题:

当 $m=n=2k+1$ 时

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^{2k+1}x\cos^{2k+1}x}=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{C_{k+i}^i}{(2k-2i)\cos^{2k-2i}x}-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{C_{k+i}^i}{(2k-2i)\sin^{2k-2i}x}+$$

收稿日期:1996-10-22⒀　周学松,男,1956年生,副教授⒀

$$C_{2k}^{k}\ln|\tan x| + C_1.\qquad \text{当 } m\neq n \text{ 时}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^{m}x\cos^{n}x} = \sum_{i=0}^{l}\int\frac{C_{n+i}^{i}\mathrm{d}(\sin x)}{\sin^{2n-2i-2k+1}x} - \sum_{i=0}^{l}\int\frac{C_{n+i}^{i}(1-\cos^{2}x)^{k}}{\cos^{2n-2i+1}x}\mathrm{d}(\cos x). \tag{4}$$

其中 $k=\dfrac{n-m}{2}$ $(m<n)$, $l=\dfrac{n-1}{2}$。

文献[3]作者将文献[2]中经过繁琐证明得到的:

定理 2[2]

$$\frac{1}{(x+\alpha)^{m}(x+\beta)^{n}} = \sum_{i=0}^{m-1}\frac{C_{n+i-1}^{i}}{(-1)^{i}(\beta-\alpha)^{n+i}(x+\alpha)^{m-i}} + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{C_{m+i-1}^{i}}{(-1)^{i}(\alpha-\beta)^{m+i}(x+\beta)^{n-i}} \tag{5}$$

其中 $m,n=1,2,\cdots$, $\alpha\neq\beta$。

利用一个组合数的性质简单的证明之,并取 $\alpha=0$, $\beta=-1$,用 $\sin^{2}x$ 代替 x 后,巧妙地得到上述定理 1 的推广之恒等式,从而得到文献[3]的主要结果。

定理 3[3]

$$\frac{1}{\sin^{2m}x\cos^{2n}x} = \sum_{i=0}^{m-1}\frac{C_{n+i-1}^{i}}{\sin^{2m-2i}x} + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{C_{m+i-1}^{i}}{\cos^{2n-2}x} \tag{6}$$

$$\frac{1}{\sin^{2m-1}x\cos^{2n-1}x} = \sum_{i=0}^{m-1}\frac{C_{n+i-1}^{i}\cos x}{\sin^{2m-2i-1}x} + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{C_{m+i-1}^{i}\sin x}{\cos^{2n-2i-1}x} \tag{7}$$

$$m,n=1,2,\cdots$$

利用式(7)得不定积分公式:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^{2m-1}x\cos^{2n-1}x} = \sum_{i=0}^{n-2}\frac{C_{m+i-1}^{i}}{(2n-2i-2)\cos^{2n-2i-2}x} - \sum_{i=1}^{m-2}\frac{C_{n+i-1}^{i}}{(2m-2i-2)\sin^{2m-2i-2}x} + C_{m+n-2}^{m-1}\ln|\tan x| + C_1,\quad m,n=1,2,\cdots \tag{8}$$

显然,式(18)比式(4)好得多。

但我们认为,当 m 和 n 为奇正整数时,式(1)实际上是一个极简单的积分,无须如文献[1]、[2]、[3]中繁琐计算,按下法可快速求解:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^{2m-1}x\cos^{2n-1}x} = \int\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\tan^{2m-1}x\cos^{2n+2m-4}x} = \int\frac{1}{\tan^{2m-1}x}(1+\tan^{2}x)^{n+m-2}\mathrm{d}(\tan x) =$$
$$\int\sum_{i=0}^{n+m-2}C_{n+m-2}^{i}\tan^{2i-2m+1}x\,\mathrm{d}(\tan x) = \sum_{i=0}^{n+m-2}\frac{C_{n+m-2}^{i}}{2i-2m+2}\tan^{2i-2m+2}x + C_{n+m-2}^{m-1}\ln|\tan x| + c_1$$
$$m,n=1,2,\cdots \tag{9}$$

毫无疑问,式(9)比式(8)更加简洁明了。不仅如此,当 m、n 为偶正整数时,从式(3)、(6)看不出有好的办法求出式(1)的显解公式,而我们完全用式(9)的方法可轻易得到:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^{2m}x\cos^{2n}x} = \sum_{i=0}^{n+m-1}\frac{C_{n+m-1}^{i}}{2i-2m+1}\tan^{2i-2m+1}x + c_1,\quad m,n=1,2,\cdots \tag{10}$$

但遗憾的是,当 m, n 为奇偶性互异的正整数时,式(9)的办法失效了。此时,我们需借助上述定理 2 中的恒等式按如下方法可得其显解公式。

设 $m=2k-1$, $n=2t$, $S=\sin x$, $C=\cos x$

因为　$\frac{1}{S^{2k-1}C^{2t}} = \frac{S}{(1-c^2)^k c^{2t}} = \frac{S}{(\frac{1}{C^2}-1)^k C^{2t+2k}} = \frac{1}{(\frac{1}{C^2}-1)^k}(\frac{1}{C})^{2t+2k-2}\frac{S}{C^2}$

所以　$\int\frac{\mathrm{d}t}{\sin^{2k-1}x\cos^{2t}x} = \int\frac{(\frac{1}{C})^{2t+2k-2}}{(\frac{1}{C}-1)^k(\frac{1}{C}+1)^k}\mathrm{d}(\frac{1}{C}) \xlongequal{u=\frac{1}{C}} \int\frac{u^{2t+2k-2}}{(u-1)^k(u+1)^k}\mathrm{d}u$

$$= \int\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(-1)^k C_{k+i-1}^i u^{2t+2k-2}}{(-2)^{k+i}(u-1)^{k-i}}\mathrm{d}u + \int\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(-1)^k C_{k+i-1}^i u^{2t+2k-2}}{2^{k+i}(u+1)^{k-i}}\mathrm{d}u$$⒀

上式第一个积分中令 $u-1=y$ 作变换,第二个积分中令 $u+1=z$ 作变换,然后用牛顿二项式定理展开并逐项积分即可⒀

至此,我们完全解决了式(1) 的显解公式问题⒀得本文主要结果:

定理 4　设 $s,t=1,2,\cdots,$,则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^m x\cos^n x} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{s+t-2}\frac{C_{s+t-2}^i}{2i-2s+2}\tan^{2i-2s+2}x + C_{s+t-2}^{s-1}\ln|\tan x| + C_1, & m=2s-1,\ n=2t-1 \\ \sum_{i=0}^{s+t-1}\frac{C_{s+t-1}^i}{2i-2s+1}\tan^{2i-2s+1}x + C_1, & m=2s,\ n=2t \\ \int\sum_{i=0}^{s-1}\frac{(-1)^s C_{s+t-1}^i u^{2t+2s-2}}{(-2)^{s+i}(u-1)^{s-i}}\mathrm{d}u + \int\sum_{i=0}^{s-1}\frac{(-1)^s C_{s+i-1}^i u^{2t+2s-2}}{2^{s+i}(u+1)^{s-i}}\mathrm{d}u & m=2s-1,\ n=2t \end{cases}$$

其中　$u=\frac{1}{\cos x}$

参　考　文　献

1　李仲来⒀介绍一种新的杨辉三角⒀数学通报,1987,18(3):1～2

2　李仲来⒀双进组合三角在计算不定积分中的应用⒀数学的实践与认识,1988,19(1):79～86

3　郑世柏⒀关于双进组合三角在计算不定积分中的应用的一个注记⒀数学的实践与认识,1993,24(3):71～73

Further Discussion about the application of a Combinatorial Triangle with Repetition to Indefinite Integration

Zhou Xuesong　Zhou Shangcao

(Basic Courses Department)

Abstract　We use a simple method to give a formula $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^m x\cos^n x}$ when $m=2s-1$, $n=2t-1$; $m=2s$, $n=2t$, s, $t=1,2,\cdots$, and use the formula given in [2] to obtain a formula $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^m x\cos^n x}$ when $m=2s-1$, $n=2t$ or $m=2s$, $n=2t-1$.

Key words　a combinatorial triangle with repetition; indefinite integration