第14卷第1期 Journal of East China Jiaotong University Vol.14 No.1
1997年3月 Mar. 1997

图的相对结合数的进一步结果*

邓毅雄

(基础课部)

摘　要　在文献[2]基础上,对图的相对结合数进行了进一步讨论,其中讨论了相对结合数与图的结构,图含有1-因子的关系,并给出了带宽的一个新下界19.

关键词　图;相对结合数;1-因子;带宽

分类号　O157.5

0　引　言

本文仅讨论简单图,未加定义的术语均可参阅文献[1]⒀

文献[2]中,作者由图的结合数引入了图的相对结合数概念,其定义为:图 $G=(V,E)$ 的相对结合数(relative binding number)

$$rb(G)=\max\{|S|-|N(S)|\mid \varnothing\neq S\subseteq V,N(S)\neq V\}⒀$$

其中 $N(S)=N_G(S)$ 表示 S 的邻域⒀若对 $S^*\subseteq V$, $S^*\neq\varnothing$ 且 $N(S^*)\neq V$,使 $rb(G)=|S^*|-|N(S^*)|$,则称 S^* 为 G 的 rb-集⒀

如果 M 是图 G 的互不相邻的边集,则称 M 为 G 的配匹,M 中各边的端点称为被 M 覆盖⒀如果存在配匹 M,它覆盖 G 的所有点,则称 M 为 G 的1-因子(或完美配匹),也称 G 含有1-因子⒀

对任意双射 $f:V\longrightarrow\{1,2,\cdots,|V|\}$,称 $B(G,f)=\max\limits_{uv\in E}|f(u)-f(v)|$ 为 G 在 f 下的带宽,f 称为 G 的标号;而图 G 的带宽定义为 $B(G)=\min\limits_{f}B(G,f)$,

其中 min 取遍 G 的所有标号 f⒀

本文首先对文献[2]中关于图的结构的有关结果进一步改进,然后讨论 $rb(G)$ 与 G 含有1-因子的关系,最后得到带宽关于 $rb(G)$ 的下界⒀

1　相对结合数与图的结构

文献[2]证明了:$rb(G)=n-2$,当且仅当 $G=K_{1,n-1}$;$rb(G)=2-n$ 当且仅当 $G=K_n$;不存

收稿日期:1996-06-10⒀　邓毅雄,男,1963年生,讲师⒀

* 江西省自然科学基金资助⒀

在 n 阶连通图 G，使 $rb(G)=n-3$以及

引理1[2]　设图 G 为由 $K_{1,n-1}$ ($n\geqslant 4$) 添加一条边或由 $K_{1,n-k-1}$的某一端点添加 k 条悬挂边所得之图，则 $rb(G)=n-4$．

引理2[2]　若 G 是 n 阶连通图，$\alpha(G)$ 为 G 的点独立数，则 $rb(G)>2\alpha(G)-n$．

引理3[2]　若 $\delta(G)$ 是 G 的最小度，且 $u\in V(G)$，$d(u)=\delta(G)$，$B=N(u)$，$A=\{v\mid v\in V(G)，N(v)=B\}$，则 $rb(G)\geqslant|A|-\delta(G)$；特别地，由于 $|A|\geqslant 1$，则 $rb(G)\geqslant 1-\delta(G)$．

这里我们首先对引理1的结果进行改进，有

定理1　n 阶连通图 G ($n\geqslant 4$) 满足 $rb(G)=n-4$当且仅当 G 为 $K_2+\overline{K_{n-2}}$或 $K_2+\overline{K_{n-2}}$的连通生成子图但 $G\neq K_{1,n-1}$．

证明　充分性易于证得．下面证明必要性：

如果 $rb(G)=n-4$，设 S 是 G 的一个 $rb-$集，$|S|=t$，则 $|N(S)|=t-n+4$．由于 $|N(S)|\geqslant 1$．

情形1　当 $|N(S)|=1$时，$t=n-3$．设 $N(S)=\{v\}$，则 $S\cap N(S)=\varnothing$，且 S 是独立集，$G[S\cup N(S)]=K_1+\overline{K_{n-3}}$．设 $V-S-N(S)=\{w_1,w_2\}$，则 w_1、w_2至多与 v 相邻，而且必有 $w_1w_2\in E(G)$，否则由于 G 连通，则 $w_1v,w_2v\in E(G)$，即 $G=K_{1,n-1}$，而 $rb(K_{1,n-1})=n-2$，矛盾．因此 $G[v,w_1,w_2]$为 K_3或 P_3．

情形2　当 $|N(S)|=2$时，$t=n-2$．设 $N(S)=\{v_1,v_2\}$，此时也必有 $S\cap N(S)=\varnothing$，否则必会导致 $|N(S)|\geqslant 3$．而且 S 是独立集，$V-S-N(S)=\varnothing$，所以 G 为 $K_2+\overline{K_{n-2}}$或 $K_2+\overline{K_{n-2}}$的连通生成子图但 $G\neq K_{1,n-1}$．

情形3　当 $|N(S)|=3$时，$t=n-1$，此时$2\leqslant|S\cap N(S)|\leqslant 3$．当 $|S\cap N(S)|=3$时，$N(S)\subseteq S$，$|V-S-N(S)|=1$，由 G 的连通性，$V-S-N(S)$ 中的唯一点必与 S 中至少一点邻接，这导致 $|N(S)|\geqslant 4$，矛盾．当 $|S\cap N(S)|=2$时，设 $N(S)=\{v_1,v_2,v_3\}$，且 $v_1,v_2\in S$，则 $S-\{v_1,v_2\}$是独立集，且 $S-\{v_1,v_2\}$中每一点均与 v_3邻接，即 $G[(S-\{v_1,v_2\})\cup\{v_3\}]=K_{1,n-3}$，而 $G[N(S)]=K_3$或 P_3，其中 v_1,v_2不能与 $S-\{v_1,v_2\}$邻接，所以 G 为 $K_{1,n-1}$添加一条边或由 $K_{1,n-2}$的某端点邻接一条悬挂边所得之图．

情形4　当 $|N(S)|\geqslant 4$时，$t\geqslant n$，由 G 的连通性，$N(S)=V$，矛盾．

综上所述，并注意到情形(1)、(3) 的图类是情形(2) 的特例，结论成立．

定理2　n 阶连通图 G ($n\geqslant 5$) 满足 $rb(G)=n-5$当且仅当 $G=\overline{K_{n-4}}+K_1+K_3$或在该图的 K_1与 K_3之间删掉至多两条边所得之图．

证明　充分性显然成立．

如果 $rb(G)=n-5$，设 S 为 G 的 $rb-$集，$|S|=t$，则 $|N(S)|=t-n+5\geqslant 1$．

情形1　当 $|N(S)|=1$时，$t=n-4$．设 $N(S)=\{v\}$，此时 S 为独立集，$G[S\cup N(S)]=K_1+\overline{K_{n-4}}$，而且 $G[V-S-N(S)]$必为连通子图，否则易知会导致 $rb(G)\geqslant n-4$，从而其为 P_3或 K_3．若为 P_3，且 $P_3=w_1w_2w_3$，当取 $S'=S\cup\{w_1,w_2\}$时，$N(S')=\{w_2,v\}$，则 $rb(G)\geqslant|S'|-|N(S')|=n-4$，矛盾．若为 K_3，则 G 为$\overline{K_{n-4}}+K_1+K_3$或在该图的 K_1与 K_3之间至多删掉两条边所得之图．

情形2　当 $|N(S)|=2$时，$t=n-3$．设 $N(S)=\{v_1,v_2\}$，$S=\{u_1,u_2,\cdots,u_{n-3}\}$．

若 $N(S)\cap S\neq\varnothing$，不妨设 $v_1\in N(S)\cap S$，要使 $v_1\in N(S)$，必存在 $u_i\in S$，$u_i\neq v_1$，使 $v_1u_i\in E$

(G)，当 $u_i \neq v_2$ 时，由 $v_1 \in S$，则 $u_i \in N(S)$，$|N(S)| \geqslant 3$，矛盾；当 $u_i = v_2$ 时，$v_2 \in S$，由 G 的连通性，也立即导致 $|N(S)| \geqslant 3$，矛盾⒀

若 $N(S) \cap S = \varnothing$，则 S 是独立集⒀设 $V - S - N(S) = \{w\}$，显然 $wu_i \notin E(G)$ $(i = 1, 2, \cdots, n-3)$⒀由 G 的连通性，w 至少与 v_1、v_2 中一点邻接，取 $S' = S \cup \{w\}$，则 $rb(G) \geqslant |S'| - |N(S')| = 1 + (|S| - |N(S)|) = n - 4$，矛盾⒀

情形3 当 $|N(S)| = 3$ 时，$t = n - 2$⒀设 $N(S) = \{v_1, v_2, v_3\}$，$S = \{u_1, u_2, \cdots, u_{n-2}\}$.

当 $|N(S) \cap S| = 0$ 时，$|V| \geqslant |S| + |N(S)| = n + 1$，矛盾⒀

当 $|N(S) \cap S| = 1$ 时，不妨设 $v_1 \in N(S) \cap S$，要使 $v_1 \in N(S)$，必存在 $u_i \in S$，$u_i \neq v_1$，使 $v_1u_i \in E(G)$，由 $v_1 \in S$，则 $u_i \in N(S)$，这导致 $|N(S) \cap S| \geqslant 2$，矛盾⒀

类似可证当 $|N(S) \cap S| = 2$ 或3时，矛盾⒀

情形4 当 $|N(S)| = 4$ 时，$t = n - 1$，设 $N(S) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$，由于 $3 \leqslant |N(S) \cap S| \leqslant 4$，当 $|N(S) \cap S| = 3$ 时，不妨设 $N(S) \cap S = \{v_1, v_2, v_3\}$，显然 v_1, v_2, v_3 不与 $S - \{v_1, v_2, v_3\}$ 中任一点邻接，则 $N(S - N(S)) = \{v_4\}$，而且 $S - N(S)$ 是独立集⒀类似情形1有 G 为 $\overline{K_{n-4}} + K_1 + K_3$ 或在该图中 K_1 与 K_3 之间删掉至多两条边所得之图；而当 $|N(S) \cap S| = 4$ 时，易于导出矛盾⒀

情形5 当 $|N(S)| \geqslant 5$ 时，$t \geqslant n$，$N(S) = V$，矛盾⒀

综上所述，定理成立⒀

我们已经知道，对于任意 n 阶连通图 G，$rb(G) \neq n - 3$，现在进一步有

定理3 对任意 n 阶连通图 G，$rb(G) \neq 3 - n$⒀

证明 用反证法⒀若存在 n 阶连通图 G，使 $rb(G) = 3 - n$，由引理2，$rb(G) = 3 - n \geqslant 2\alpha(G) - n$，从而 $\alpha(G) \leqslant 3/2$，又因 $\alpha(G)$ 为正整数，则 $\alpha(G) = 1$，故 $G = K_n$，但 $rb(K_n) = 2 - n$，矛盾⒀

另外，注意到 $rb(K_{m+1} + \overline{K_1} + K_{n-m-2}) = m$ $(0 \leqslant m \leqslant n - 4)$，$rb(K_{n-r} + \overline{K_r}) = 2r - n$ $(1 \leqslant r \leqslant [n/2]$，$rb(K_3 + K_{n-r-3} + \overline{K_r}) = 2r + 3 - n \neq (1 \leqslant r \leqslant [(n-3)/2]$，则

推论1 对任意 $2 - n \leqslant m \leqslant n - 2$，$m \neq 3 - n$ 或 $n - 3$，存在 n 阶连通图 G，使 $rb(G) = m$⒀

由引理2～3，我们也立即有

定理4 设 G 是 n 阶连通图，且 $rb(G) = 4 - n$ 或 $5 - n$，则 $\alpha(G) = 2$⒀

定理5 设 G 是 n 阶连通图，且 $rb(G) = 5 - n$ 则 $\delta(G) = n - 4$⒀

2 相对结合数与1－因子

在文献[2]中，作者讨论了 $rb(G)$ 与 G 的 Hamilton 性的关系，下面我们讨论其与图含有1－因子的关系⒀

首先注意到文献[3]中的一个结论：

引理4 (Berge) 设 G 是偶数阶图且任意两个点不相交的奇圈都有一条边相连，则 G 含有1－因子当且仅当对任意 $X \subseteq V(G)$，$|X| \leqslant |N(X)|$⒀

由此立即得到

定理6 设 G 是偶数阶图且任意两个点不相交的奇圈都有一条边相连，则 G 含有1－因子当且仅当 $rb(G) \leqslant 0$⒀

对于偶图 $G = (A, B)$，它不含奇圈，显然 $rb(G) \leqslant 0$⒀

引理5　(Hall 定理)　偶图 $G=(A,B)$ 含有1−因子当且仅当对任意 $X\subseteq A$, $|X|\leqslant|N(X)|$ 且 $|A|=|B|$⒀

定理7　偶图 $G=(A,B)$ 含有1−因子当且仅当 $rb(G)=0$, 且 $|A|=|B|$⒀

证明　若 $rb(G)=0$ 且 $|A|=|B|$, 由相对结合数定义, 对任意 $X\subseteq A$, 由引理5及 $N(X)\subseteq B$, $|X|-|N(X)|\leqslant rb(G)=0$, 则 G 含有1−因子⒀

若 G 含有1−因子, 显然 $|A|=|B|$, 只要证 $rb(G)\geqslant 0$ 即可⒀事实上, 取 $S=A$, 那么 $|N(S)|=B$, $rb(G)\geqslant|S|-|N(S)|=|A|-|B|=0$⒀

现对一般图给出一个充分条件⒀

引理6　(Tutte 定理)　图 G 含有1−因子当且仅当对任意 $X\subseteq V(G)$, $C_o(G-X)\leqslant|X|$, 其中 $C_o(G-X)$ 表示子图 $G-X$ 的奇分支数⒀

定理8　设 G 为具有偶数阶 n 的连通图, 如果 $rb(G)<[\frac{3}{2}-\frac{n}{4}]$, 则 G 含有1−因子⒀

证明　若 G 不含1−因子, 由 Tutte 定理, 存在 $X\subseteq V(G)$, 使 $C_o(G-X)>|X|$⒀设 $|X|=k$, $rb(G)=b$, m 表示 $G-X$ 中孤立点分支的数目⒀由于 G 为偶数阶, 可设 $C_o(G-X)\geqslant k+2$⒀注意到 $N(G-X)=V(G)$ 当且仅当 $m=0$⒀

情形1　若 $m\neq 0$, 则 $N(G-X)\neq V(G)$, 由于 $rb(G)=b$, 则 $|G-X|-|N(G-X)|\leqslant b$, 即 $|N(G-X)|\geqslant|G-X|-b=n-k-b$, 且显然 $|N(G-X)|\leqslant n-m$, 故

$$m\leqslant k+b⒀\tag{1}$$

另一方面, 由于所有非孤立点的奇分支至少有三个点, 计算 G 的阶数, 有

$$n\geqslant 3(k+2-m)+m+k,$$

即

$$k\leqslant n/4+m/2-\frac{3}{2}⒀\tag{2}$$

由式(1)、(2)得

$$m/2\leqslant n/4-3/2+b\tag{3}$$

由于 $b<[\frac{3}{2}-\frac{n}{4}]\leqslant\frac{3}{2}-\frac{n}{4}$, 由式(3)知 $m<0$, 这与假设矛盾⒀

情形2　若 $m=0$, 设 S 是 $G-X$ 的任意 $k+1$ 个奇分支之点集, 则 $|N(S)|\neq V(G)$, 由 $rb(G)=b$, 有 $|N(S)|\leqslant|S|-b$⒀另外有 $N(S)\subseteq S\cup X$, 则 $|N(S)|\leqslant|S|+k$, 从而

$$k\geqslant -b⒀\tag{4}$$

另一方面, 由 $|S|\geqslant 3(k+1)$, 且 $|N(S)|\leqslant n-3$, 则

$$3(k+1)-b\leqslant|S|-b\leqslant|N(S)|\leqslant n-3,$$

从而

$$k\leqslant n/3-2+b/3⒀\tag{5}$$

由式(4)、(5):

$$-b\leqslant n/3-2+b/3, \text{即 } b\geqslant 3/2-n/4,$$

矛盾⒀

综上所述, 结论成立⒀

设 $G_1=K_r$, $G_2=(r-1)K_3\cup K_2$, 而 $G=G_1+G_2$, $|V(G)|=4r-1$, 易于验证: G 不含1−因

子，且 $rb(G)=2-r=[3/2-|V(G)|/4]$⒀所以一定意义上此定理结论是严格的⒀

3　相对结合数与带宽

文献[4]获得确定带宽下界的方法，设 φ为图的不变量，若 G 为 H 的生成子图，导致 $\varphi(G)\leqslant\varphi(H)$，则称 φ为递增的；若导致 $\varphi(G)\geqslant\varphi(H)$，则称 φ为递减的⒀

设 P_n 表示 n 阶路，P_n^k 表示路 P_n 的 k 次幂⒀

引理7[4]　(1) 当 φ递增时，$B(G)\geqslant\min\{k:\varphi(G)\leqslant\varphi($●$)\}$；

(2) 当 φ递减时，$B(G)\geqslant\min\{k:\varphi(G)\geqslant\varphi($●$)\}$⒀

引理8

$$rb(P_n^k)=\begin{cases}2-n, & n\leqslant k+1\\ 4-n, & n=k+2\\ 1-k, & n>k+2\end{cases}$$

证明　由于 $rb(K_n)=2-n$ 及文献[2]定理9，当 $n\leqslant k+2$时，结论成立⒀

当 $n>k+2$时，一方面，取 $S=\{v_1\}$(其中 v_1 为 P_n 的端点)，则 $|N(S)|=k$，从而 $rb(P_n^k)\geqslant|S|-|N(S)|=1-k$；另一方面，设 S^* 为 P_n^k 的任一 rb－集，由于 $|N(S^*)|\geqslant|S^*|+k-1$，从而 $rb(P_n^k)=|S^*|-|N(S^*)|\leqslant|S^*|-(|S^*|+k-1)=1-k$⒀因此 $rb(P_n^k)=1-k$⒀

定理9　$B(G)\geqslant1-rb(G)$⒀

证明　显然 $rb(G)$ 是递减的，且 $rb(P_n^k)\geqslant1-k$，由引理7：

$$\begin{aligned}B(G)&\geqslant\min\{k:rb(G)\geqslant rb(P_n^k)\}\\&\geqslant\min\{k:rb(G)\geqslant1-k\}\\&=\min\{k:k\geqslant1-rb(G)\}\\&=1-rb(G).\end{aligned}$$

4　注　记

设 $\delta(G)$ 为 G 的最小度，且 $d(u)=\delta(G)$，$B=N(u)$，$A=\{v\,|\,N(v)=B, v\in V(G)\}$，那么，$rb(G)\geqslant|A|-|N(A)|=|A|-\delta(G)$；对 G 的补图 $\overline{G}$，取 $S=B$，则 $N_{\overline{G}}(B)\subseteq V(\overline{G})-A$，从而 $rb(\overline{G})\geqslant|B|-|N_{\overline{G}}(B)|\geqslant\delta(G)+|A|-n$，故

$$rb(G)+rb(\overline{G})\geqslant2|A|-n\geqslant2-n$$⒀

由此自然引出的问题是：$rb(G)+rb(\overline{G})$ 的精确上、下界如何?

参 考 文 献

1 Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications. Macmillan, London and Elserier, New York: 1976
2 邓毅雄.图的相对结合数.华东交通大学学报,1995,(1):92~96
3 Lovasz L, Plummer M D. Matching Theory. North-Holland, New York, 1986
4 周三明.图的带宽的若干新下界.太原机械学院学报,1994,(增刊):24~31

Further Results on Relative Binding Number of Graphs

Deng Yixiong

(Basic Courses Department)

Abstract This paper makes further discussion on the relative binding number of graphs. The results include the structure of graphs, graphs containing 1-factor, and the lower bound of bandwith of a graph in terms of its relative binding number.

Key words graph; relative binding number; 1-Factor; bandwith