

关于优美图的若干结果^{*}

徐保根 于崇智 周尚超 邓毅雄

(基础课部)

摘 要 研究了几类特殊图(包括匹配、圈、树和森林等)的补图的优美性,获得了一些新结果,并说明了用此方法可以探讨一些多边图的非优美性.

关键词 图;补图;优美图;优美标号

分类号 O157.5

0 引言及引理

本文所指的图均为无向单图.

定义^[1] 对于一个图 $G=(V, E)$, 如果对每一个 $v \in V$, 存在一个非负整数 $\theta(v)$ (称为顶点 v 的标号) 使满足

- (1) $\forall u, v \in V$, 如果 $u \neq v$, 则 $\theta(u) \neq \theta(v)$;
- (2) $\max \{\theta(v) \mid v \in V\} = |E|$;
- (3) $\forall e_1, e_2 \in E$, 如果 $e_1 \neq e_2$, 则 $\theta(e_1) \neq \theta(e_2)$;

其中 $\theta(e) = |\theta(u) - \theta(v)|, e = uv$.

则称 G 为优美图, θ 为 G 的优美标号.

优美图的研究起源于60年代,但首先给出其明确定义的是 S. W. Golomb. 从1972年起人们进行了不懈努力,尤其是近几年来优美图的研究已获得了不少成果,其应用(参见文献[1])也越来越广泛. 尽管如此,由于研究优美图缺乏系统有力的工具,目前所见到的文章大多是对特定图的优美性探讨,很少也很难将图的优美性与图的其它特性或不变量发生联系.

众所周知,当 $n \geq 5$ 时, n 阶完全图 K_n 不是优美图,这似乎是由于 K_n 的边数相对于 n 来说“太多了”. 那么,在 K_n (当 n 较大时) 中至少要去掉多少条特定边才能获得一个优美图呢? 确切回答这一问题是非常困难的. 本文考虑 K_n 中去掉匹配(n 为偶数)、生成圈、树或森林等. 即研究这些常见图的补图优美性.

在本文中, $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集; G 和 mG 分别表示 G 的补图和 m 个 G 的并图; 若 G_1 和 G_2 为两个不交的图, 则用 $G_1 + G_2$ 表示其联图, 即在 $G_1 \cup G_2$ 中再将

G_1 的每一个顶点均邻接于 G_2 的各个顶点所获得的图. 设 $n > r$, $B(n, r, m)$ 表示 m 个 K_n 具有一个公共 K_r 的图, 即为 $mK_{n-r} + K_r$, (参见文献[2]), 其它未说明的符号、术语同于文献[3]. 下面列出本文中用到的几个引理.

引理^[1] 如果 G 是一个 q 条边的欧拉图(各点度均为偶数), 则 G 为优美图的必要条件为 $q \equiv 0, 3 \pmod{4}$.

引理^[2] 若 $f(n)$ 表示 n 阶优美图的最多边数, 则 $f(8) = 23, f(9) = 29, f(10) = 36$.

引理^[4] 若 T 为一棵优美树, 则 $T + K_m$ 和 $T + K_{1,m}$ 均为优美图. 特殊地, $K_{m,n} + K_1$ 和 $K_{m,n} + K_2$ 是优美图

1 主要结论及其证明

定理1 当且仅当 $m \in \{2, 3\}$ 时, $\overline{mK_2}$ 是优美图.

证 $m = 1$ 时 K_2 不是优美图; $m = 2$ 时 $\overline{2K_2} = K_{2,2}$ 为优美图; $m = 3$ 时, $\overline{3K_2}$ 的优美标号如图(1)所示; $m = 4$ 或 5 时, 由引理2知其非优美. 下面证明 $m \geq 6$ 时, $\overline{mK_2}$ 不是优美图.

(反证) 若存在 $m \geq 6$ 使得图 $G = \overline{mK_2}$ 为优美图, 其优美标号为 y_i , 且 $0 = y_1 < y_2 < \dots$

$< y_{2m} = \binom{2m}{2} - m$. 令 $x_i = y_{i+1} - y_i$; ($1 \leq i \leq$

$2m-1$) 显然有 $\sum_{i=1}^{2m-1} x_i = \binom{2m}{2} - m$.

令 $Y = \{y_i \mid 1 \leq i \leq 2m\}$; $A_1 = \{x_i \mid 1 \leq i \leq 2m-1\}$;

$A_2 = \{x_i + x_{i+1} \mid 1 \leq i \leq 2m-2\}$;

$A_3 = \{x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \mid 1 \leq i \leq 2m-3\}$;

$A_4 = \{x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} \mid 1 \leq i \leq 2m-4\}$;

$A_5 = \{x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + x_{i+3} + x_{i+4} \mid 1 \leq i \leq 2m-5\}$;

$A = \bigcup_{i=1}^5 A_i$.

在 A 中至多有 $10m - 15$ 个数, 由于每一个数具有 $y_i - y_j$ 形式, 因此 A 中至少有 $9m - 15$ 个互不相同的数(代表 $\overline{mK_2}$ 的边标号), 其余 m 个数(代表匹配 mK_2 的边标号)也互异. 考虑 A 中全部 $10m - 15$ 个数之和得知 $5(x_1 + x_{2m-1}) + 9(x_2 + x_{2m-2}) + 12(x_3 + x_{2m-3}) + 14(x_4 + x_{2m-4}) + 15 \sum_{i=5}^{2m-5} x_i \geq \sum_{i=1}^{9m-15} i + \sum_{i=1}^m i = 41m^2 - 130m + 105$,

即 $15 \sum_{i=1}^{2m-1} x_i \geq 41m^2 - 130m + 105 + X$.

其中 $X = 10(x_1 + x_{2m-1}) + 6(x_2 + x_{2m-2}) + 3(x_3 + x_{2m-3}) + x_4 + x_{2m-4}$.

下面估计 X 的值.

注意到 $G = \overline{mK_2}$; Y 中任意 4 个互不相同的数 a, b, c 和 d , 均有 $a - b \neq c - d$ (否则 G 中

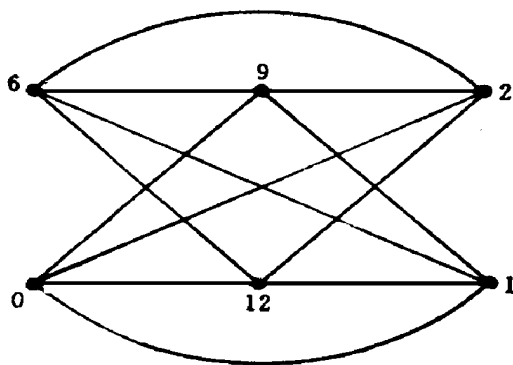


图1 $m = 3$ 时, $\overline{3K_2}$ 的优美标号

有相同的边标号), 因此, 我们有如下特征:

- (1) 若 $|i - j| \geq 2$, 则 $x_i \neq x_j$.
- (2) $x_1 + x_2 \neq x_i (i \geq 4); x_{2m-1} + x_{2m-2} \neq x_j (j \leq 2m - 4)$.
- (3) $x_1 + x_2 \neq x_{2m-1} + x_{2m-2}$.

在条件 (1) ~ (3) 下, X 下界不难估计如下: $X \geq 10(1 + 3) + 6(1 + 3) + 3(4 + 5) + 4 + 5 = 100$, (这里是比较了各种情况下所取的值). 代入式 (1) 得

$$15 \left[\binom{2m}{2} - m \right] \geq 41m^2 - 130m + 205,$$

即: $11m^2 - 100m + 205 \leq 0$ (2)

式 (2) 与 $m \geq 6$ 矛盾. 定理 1 证毕.

对于图 $B(n, r, m)$, 文献[2]指出: 除 $(n, r) = (3, 2), (4, 2)$ 和 $(4, 3)$ 外, 其余均未知其优美性. 文献[5]证得: 当 $n \geq 10$ 时 $B(n, n - 1, 2)$ 不是优美图. 这里我们进一步得出

定理 2 下列三个条件是等价的:

- (1) $n \in \{2, 3, 4\}$;
- (2) $B(n, n - 1, 2)$ 是优美图;
- (3) $B(n, n - 1, 3)$ 是优美图.

证 注意到 $B(n, n - 1, 2) = K_{n-1} + K_2 = K_{n+1} - e$; $B(n, n - 1, 3) = K_{n-1} + K_3$. 由引理 3 知: $B(2, 1, 2)$ 、 $B(3, 2, 2)$ 和 $B(4, 3, 2) = K_{1,2} + K_2$ 为优美图, 且 $B(2, 1, 3)$ 和 $B(3, 2, 3) = K_{1,3} + K_2$ 也是优美图. $B(4, 3, 3)$ 的优美标号如图 2 所示. 当 $n = 5$ 时, $B(5, 4, 2) = K_6 - e$ 不是优美图 (6 阶优美图最多有 13 条边^[1]). $B(5, 4, 3)$ 有 18 条边, 且各顶点均为偶数度, 由引理 1 知其非优美图. 下面证明当 $n \geq 6$ 时, $B(n, n - 1, 2)$ 和 $B(n, n - 1, 3)$ 均不是优美图即可.

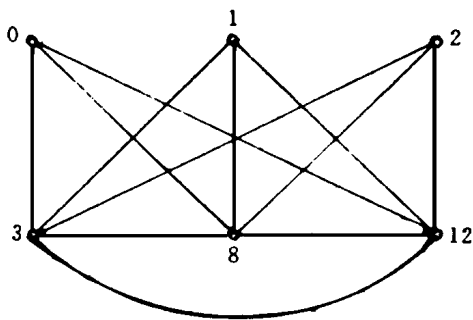


图 2 $B(4, 3, 3)$ 的优美标号

情形 1 若存在 $n \geq 6$ 使得 $B(n, n - 1, 2) = K_{n+1} - e$ 为优美图. 同定理 1 的证明类似, 令 $B(n, n - 1, 2)$ 的优美标号为 $y_i (1 \leq i \leq n + 1)$, 其中 $0 = y_1 < y_2 < \dots < y_{n+1} = \binom{n+1}{2} - 1$. 令 $x_i = y_{i+1} - y_i$, 显然 $\sum_{i=1}^n x_i = \binom{n+1}{2} - 1$. 令 $A_1 = \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, $A_2 = \{x_i + x_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n - 1\}$, $A_3 = \{x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \mid 1 \leq i \leq n - 2\}$. 在 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ 中共有 $3n - 3$ 个数, 其中至少有 $3n - 4$ 个数互异, 考虑其全部之和得: $3(x_1 + x_n) + 5(x_2 + x_{n-1}) + 6 \sum_{i=3}^{n-2} x_i \geq 1 + \sum_{i=1}^{3n-4} i$.

即

$$6 \left[\binom{n+1}{2} - 1 \right] \geq 1 + \frac{(3n-3)(3n-4)}{2} + 3(x_1 + x_n) + x_2 + x_{n-1}.$$

注意到 $B(n, n - 1, 2) = K_{n+1} - e$, x_1, x_2, x_n 和 x_{n-1} 满足定理 1 证明中指出的三个特征, 不难验证:

$3(x_1 + x_n) + x_2 + x_{n-1} \geq 15$, 代入上式并化简得 $3n^2 - 27n + 56 \leq 0$, 这与 $n \geq 6$ 矛盾.

情形 2 若存在 $n \geq 6$ 使得 $B(n, n-1, 3) = K_{n-1} + K_3$ 为优美图. 当 $6 \leq n \leq 8$ 时, 由引理 2 及文献[1] 知其为非优美图. 故下设 $n \geq 9$.

在情形(1) 中将 n 换成 $n+1$, 此时 $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \binom{n+2}{2} - 3$, 考虑 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ 中的全部 $3n$ 个数之和(其中至少有 $3n-3$ 个数互异). 并注意到 A_1 中不可能有 4 个数均为 1.

$$6 \left[\binom{n+2}{2} - 3 \right] \geq 1 + 1 + 2 + \frac{(3n-3)(3n-2)}{2} + 3 \times 2 + 1 + 2.$$

简化为: $3n^2 - 33n + 56 \leq 0$, 这与假设 $n \geq 9$ 矛盾, 定理 2 证毕.

定理 3 当 $n \geq 21$ 时, C_n 不是优美图.

证 若存在 $n \geq 21$ 使得 C_n 为优美图. $Y = \{y_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ 为 C_n 的顶点标号集. $0 = y_1 < y_2 < y_3 < \dots < y_n = |E(C_n)| = \binom{n}{2} - n$, $x_i = y_{i+1} - y_i$, 与定理 1 的证明同样令:

$A_k = \{x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + \dots + x_{i+k-1} \mid 1 \leq i \leq n-k\}$, ($1 \leq k \leq 6$), 在 $A = \bigcup_{k=1}^6 A_k$ 中共有 $6n-21$ 个数, 其中至少有 $5n-21$ 个数互不相同(它们代表了 C_n 的边标号), 且根据 C_n 图的特征, 同一个数在 A 中至多出现 2 次, 因此考虑 A 中全部 $6n-21$ 个数之和得

$$6(x_1 + x_{n-1}) + 11(x_2 + x_{n-2}) + 15(x_3 + x_{n-3}) + 18(x_4 + x_{n-4}) + 20(x_5 + x_{n-5}) + 21 \sum_{i=1}^{n-6} x_i \geq \sum_{i=1}^{5n-21} i + \sum_{i=1}^n i, \text{ 即有}$$

$$21 \sum_{i=1}^{n-1} x_i \geq \frac{(5n-20)(5n-21) + n(n+1)}{2} + X \quad (*)$$

其中 $X = 15(x_1 + x_{n-1}) + 10(x_2 + x_{n-2}) + 6(x_3 + x_{n-3}) + 3(x_4 + x_{n-4}) + x_5 + x_{n-5}$

注意到当 $|i-j| \geq 2$ 时, $x_i \neq x_j$ (否则 C_n 中有相同的边标号), 且 A 中每个数至多出现 2 次, 因此, X 的值可粗略估计如下:

$$X \geq 15(1+2) + 10(1+2) + 6(3+4) + 3(3+4) + 5+6 = 149$$

且 $\sum_{i=1}^{n-1} x_i = y_n = \binom{n}{2} - n$, 代入式 * 得

$$21 \cdot \left[\binom{n}{2} - n \right] \geq \frac{(5n-20)(5n-21) + n(n+1)}{2} + 149.$$

简化为: $5n^2 - 141n + 718 \leq 0$, 即得 $6 < n < 22$, 注意到 C_{21} 为 189 条边的欧拉图, 由引理 1 知其非优美图, 这与假设 $n \geq 21$ 矛盾. 定理证毕.

注: 当 $n = 5, 7, 13, 15$ 时, 由引理 1 知其非优美图. 对于圈的补图, 我们仅发现的一个优美图是 C_6 , 优美标号如图 3 所示. 对于其余 11 个值, 即 $n = 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 17, 18, 19, 20$, 目前还未知其优美性.

定理 4 当 $m = 5$ 或 $m \geq 7$ 时, $\overline{mk_3}$ 不是优美图.

证 在定理 3 的证明中将 n 换成 $3m$, 当 $m = 5$ 或 7 时, 由引理 1 知其非优美. 当 $m \geq 8$ 时, $n \geq 24$, 与定理 3 的证明完全一样得知 $\overline{mk_3}$ 为非优美图. 证毕.

上述两个定理的一般结论为:

定理 5 若 G 为若干个圈的并图, 且 $|V(G)| \in \{5, 7, 13, 15\}$ 或 $|V(G)| \geq 21$, 则 G 不是

优美图.

定理 6 若 T 为任意一棵树, 且 $|V(T)| \geq 21$, 则 T 不是优美图.

证 若存在 n 阶树 T , 使 T 为优美图, 且 $n \geq 21$, $|E(T)| = \binom{n}{2} - n + 1$, 同定理 3 证明一样, A 中共有 $6n - 21$ 个数, 此时, 其中至少有 $5n - 20$ 个数互不相同, 同一个数在 A 中仍然至多出现 2 次, 且当 $|i - j| \geq 2$ 时, $x_i \neq x_j$. 因此, 对于 T 图, 定理 3 证明中的式(*) 变为:

$$21 \left(\binom{n}{2} - n + 1 \right) \geq \frac{(5n - 19)(5n - 20) + (n - 1) \cdot n}{2} + 149.$$

简化为 $5n^2 - 133n + 636 \leq 0$, 这与假设 $n \geq 21$ 矛盾, 证毕.

定理 7 若 G 的每个分支为圈或树, 且 $|V(G)| \geq 21$, 则 G 不是优美图.

证 若 G 的每个分支均为圈, 由定理 5 即得. 若存在某些为树的分支(其余分支为圈), 则 $|E(G)| \geq \binom{n}{2} - n + 1$. 类似于定理 6 的证明, 不难证明定理 7 成立. 证毕.

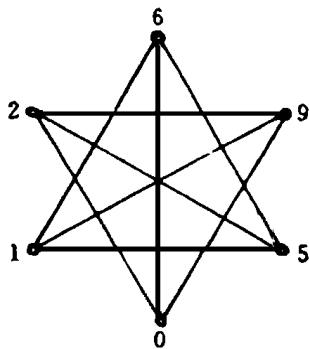


图 3 C_6 的优美标号

2 结束语

本文的主要结果是对几类补图的非优美性证明, 即对阶数较大的完全图去掉少数边所得的图非优美性探讨, 所采用的方法可以探讨多边图(或者说接近于完全图)的非优美性. 为此我们将此方法简述如下:

设 G 为一个多边图, 其阶数为 n , 其边数 $|E(G)| = \binom{n}{2} - m$, 且 m 相对于 $\binom{n}{2}$ 较小. 若 G 为优美图, $Y = \{y_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ 为其顶点优美标号集. 且 $0 = y_1 < y_2 < \dots < y_n = \binom{n}{2} - m$, $x_i = y_{i+1} - y_i$ ($1 \leq i \leq n - 1$), 易见 $\sum_{i=1}^{n-1} x_i = y_n = \binom{n}{2} - m$. 令

$$A_k = \{x_i + x_{i+1} + \dots + x_{i+k-1} \mid 1 \leq i \leq n - k\}$$

称集 A_k 为第 k 级线. 适当选择 s , $A = \bigcup_{k=1}^s A_k$, A 中共有 $t = sn - \frac{s(s+1)}{2}$ 个元素(数), 其中至少有 $t - m$ 个数两两互异. 通过考虑 A 中全部元素之和来估计 n 的上界. 为了使 n 的上界更好, 有时还考虑 G 的结构特征. 当然, 如果 G 与完全图越接近(即 m 越小), 这样所得的 n 的上界就越好. 从而当 n 较大时, G 就不是优美图.

顺便指出: 完全图 K_n ($n \geq 5$) 的非优美性早在 70 年代被证明(参见文献[2]所述), 但后来文献[6]仍在探讨其优美性问题. 如果采用上述方法证明 K_n ($n \geq 5$) 非优美则是非常简单的. 事实上, 若存在 $n \geq 5$ 使 $G = K_n$ 为优美图, 在上述中 $m = 0$, 取 $s = 2$, A 中共有 $2n - 3$ 个元素,

且两两互异. 考虑 A 中全部元素之和得: $2(x_1 + x_{n-1}) + 3 \sum_{i=2}^{n-2} x_i \geq \frac{(2n-3)(2n-2)}{2}$ 即 $3 \binom{n}{2} \geq (2n-3)(n-1) + x_1 + x_{n-1} \geq (2n-3)(n-1) + 1 + 2$, 简化为 $n^2 - 7n + 12 \leq$

0, 即 $n \leq 4$ 矛盾.

参 考 文 献

- 1 马克杰. 优美图. 北京: 北京大学出版社, 1989
- 2 柳柏廉. 关于优美图的最近结果. 应用数学, 1990, 3(4): 108~110
- 3 Bondy J A, Murty USR. Graph Theory with Applications, London: Macmillan Press, 1976
- 4 徐保根. 优美图的扩充. 华东交通大学学报, 1994, (3): 66~69
- 5 周尚超. 图 $K_{p_1} \cup K_{p_2} \cup \dots \cup K_{p_m}$ 的优美性. 华东交通大学学报, 1994, (1): 70~79
- 6 张树生. 关于完全优美图. 应用数学, 1990, 1(4): 90~93

Some Results on Graceful Graphs

Xu Baogen Yu Chongzhi Zhou Shangchao Deng Yixiong

(Basic Courses Department)

Abstract In this paper, we study the gracefulfulness on the complements of some graphs (matching, cycle, tree and forest), obtain some new results, and illuminate this method which can be used to discuss the non-gracefulness of some multi-edge graphs.

Key words graph; complement of graphs; graceful graph; graceful label