

关于优美图边数的一个上界

谢文华

(成人教育学院)

摘要 证明当 $n \geq 25$ 时, n 阶优美图的最多边数 $f(n) < \binom{n}{2} - n$ 并以此探讨了圈补图的优美性^[1].

关键词 图; 优美图; 优美标号; 圈; 补图

分类号 O 157.5

本文所指的图均为无向单图, 文中未说明的符号、术语同于文献[1~2]^[13]

定义 对于一个无向单图 $G = [V, E]$, 若对每个点 $v \in V$, 存在一个非负整数 $\theta(v)$, 使满足条件:

(1) $\forall u, v \in V$, 若 $u \neq v$, 则 $\theta(u) \neq \theta(v)$;

(2) $\max \{\theta(v) \mid v \in V\} = |E|$;

(3) $\forall e_1, e_2 \in E$, 若 $e_1 \neq e_2$, 则 $\theta(e_1) \neq \theta(e_2)$ (其中 $\theta(e) = |\theta(u) - \theta(v)|, e = uv$)^[13] 则称图 G 为优美图^[13] 称为 G 的优美标号或优美值^[13] 称为由 θ 导出的优美边标号^[13]

近几年来, 优美图的研究已经取得了不少成果, 但由于研究优美图缺少系统有力的工具, 目前所见到的文章绝大多数仅限于对特殊图的优美性的探讨^[13] 几乎没有, 也很难将图的优美性与图的其它不变量联系起来^[13] 众所周知, 当 $n \geq 25$ 时, n 阶完全图 K_n 不是优美图, 这似乎是因为 K_n 的边数相对 n 来说“太多了”^[13] 一个自然的问题是: 一个 n 阶优美图的最多可能的边数为多少? 确切回答这个问题看来是很困难的, 因此建立其边数的上界有着十分重要的意义^[13]

定理 1 设 $f(n)$ 表示 n 阶优美图的最多边数, 则当 $n \geq 25$ 时, $f(n) < \binom{n}{2} - n$ ^[13]

证 (反证法) 若存在 n 阶优美图 $G(n \geq 25)$, 其边数 $|E(G)| = \binom{n}{2} - n + t$ ($0 \leq t \leq n$), θ 为 G 的优美标号(函数)^[13] 在 θ 下, G 的顶点标号数按大小依次排列为

$$0 = y_1 < y_2 < \dots < y_n = |E(G)|, \text{ 令 } x_i = y_{i+1} - y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1),$$

显然 $\sum_{i=1}^{n-1} x_i = |E(G)|$ ^[13]

$$\text{令 } A_1 = \{x_i \mid i = 1, 2, \dots, n-1\};$$

$$A_2 = \{x_i + x_{i+1} \mid i = 1, 2, \dots, n-2\};$$

...

$$A_j = \{x_1 + x_2 + \dots + x_{i+j-1} \mid i = 1, 2, \dots, n-j\}.$$

称 A_i 为第 i 级线集, 记 $A^{(k)} = \bigcup_{i=1}^k A_i$ 为前 k 级线集的并集^[13]

若 G 为完全图, 则 $A^{(k)}$ 中的每个元素均为 G 的边标号数^[13]一般地, $E(G) = E(K_n) \setminus E(\overline{G})$, $|E(\overline{G})| = n - t$ ^[13]由于 $n \geq 25$, 我们可以取 $k = 8$, 考虑 $A^{(8)}$ 中全部元素的和, 记作 S , 有

$A^{(8)}$ 中共有 $(n-1) + (n-2) + \dots + (n-8) = 8n - 36$ 个正整数, 每个或者是 G 的, 或者是 $\overline{G}$ 的边标号数, 而 $\overline{G}$ 的边标号数至多为 $n-t$ 个, 所以 $A^{(8)}$ 中至少有 $7n - 36 + t$ 个数是 G 的边标号数, 由于 G 是优美图, 这些数是两两互异的, 于是有

$$S \geq \sum_{i=1}^{7n-36+t} i + (n-t) = \frac{1}{2}(7n-36+t)(7n-35+t) + n-t.$$

另一方面, $A^{(8)}$ 中各元素相加之和为

$$S = 8(x_1 + x_{n-1}) + 15(x_2 + x_{n-2}) + 21(x_3 + x_{n-3}) + 26(x_4 + x_{n-4}) + 30(x_5 + x_{n-5}) + 33(x_6 + x_{n-6}) + 35(x_7 + x_{n-7}) + 36 \sum_{i=8}^{n-8} x_i,$$

即得

$$S + 28(x_1 + x_{n-1}) + 21(x_2 + x_{n-2}) + 15(x_3 + x_{n-3}) + 10(x_4 + x_{n-4}) + 6(x_5 + x_{n-5}) + 3(x_6 + x_{n-6}) + (x_7 + x_{n-7}) = 36 \sum_{i=1}^{n-1} x_i = 36[(\frac{n}{2}) - n + t] \quad (13)$$

整理后有

$$36[(\frac{n}{2}) - n] \geq \frac{1}{2}(7n-36+t)(7n-35+t) + n - 37t + 168,$$

对于 $n \geq 25$, 不等式右端是 t 的增函数, 当 $t = 0$ 时, 其右端取得最小值, 于是有 $36[(\frac{n}{2}) - n] \geq \frac{1}{2}(7n-36)(7n-35) + n + 168$,

化简为 $13n^2 - 387n + 1596 \leq 0$ ^[13]

此不等式与 $n \geq 25$ 矛盾^[13]所以, 当 $n \geq 25$ 时, 不存在边数为 $(\frac{n}{2}) - n + t$ ($0 \leq t \leq n$) 的 n 阶优美图, 即 $f(n) < (\frac{n}{2}) - n$ ^[13]证毕^[13]

由定理 1 的结果, 我们可以直接得到

推论 1 $n \geq 25$ 时, n 阶树(或森林)的补图不是优美图^[13]

推论 2 当 $n \geq 25$ 时, n 阶圈的补图 $\overline{C_n}$ 不是优美图^[13]

定理 2 (1) 当 $n \in \{6, 8, 9\}$ 时, $\overline{C_n}$ 是优美图^[13]

(2) 当 $n \in \{3, 4, 5, 7, 13, 15\}$ 或 $n \geq 21$ 时, $\overline{C_n}$ 不是优美图^[13]

证 (1) 图 1, 图 2, 图 3 所示的, 就分别是 $\overline{C_6}, \overline{C_8}, \overline{C_9}$, 这三个图是优美图^[13]

(2) 当 $n = 3$ 或 4 时, $\overline{C_n}$ 显然不是优美图, 当 $n \in \{5, 7, 13, 15, 21\}$ 时, $\overline{C_n}$ 的每个顶点均为偶数度(欧拉图), 则 $|E(G)| \not\equiv 0, 3 \pmod{4}$ ^[13]由文献[1]知其不是优美图^[13]下面证当 $n \geq 22$ 时, $\overline{C_n}$ 不是优美图^[13]

(反证法) 若存在 $n \geq 22$, $\overline{C_n}$ 是优美图, 同定理 1 的证明方法一样, 取 $G = \overline{C_n}$, 仍考虑 $A^{(8)}$ 中全部 $8n - 36$ 个正整数(其中可能有相同的)的和 S ^[13]⁽⁸⁾ 中的每个数或者是 $\overline{C_n}$ 的, 或者是

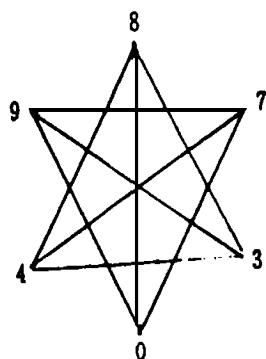


图 1

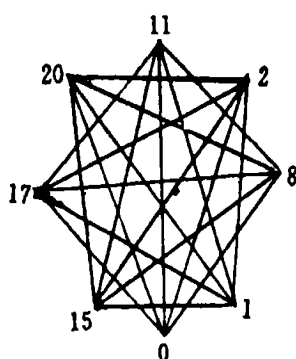


图 2

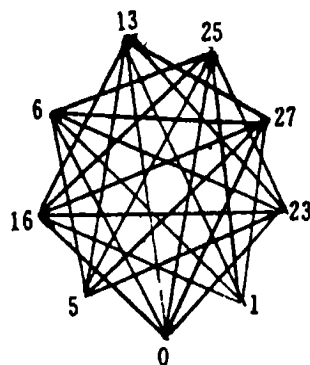


图 3

C_n 的边标号数, 且 $A^{(8)}$ 中每个数在 $A^{(8)}$ 中出现至多两次(否则, 至少有两次出现在 C_n 中, 一次出现在 C_n 中; 或者三次出现在 C_n 中; 这两种情形, 都会导致 C_n 中有相同的边标号数, 与 $\overline{C_n}$ 是优美图矛盾)(13)不妨设 $A^{(8)}$ 中有 $7n - 36 + t$ 个数是 $\overline{C_n}$ 中的边标号数, 不难得出

$$S \geq \sum_{i=1}^{7n-36+t} i + \sum_{i=1}^{n-t} i = \frac{1}{2} [(7n - 36 + t)(7n - 35 + t) + (n - t + 1)(n - t)] \quad (13)$$

另一方面, 同定理 1 的证明方法一样可得

$$\begin{aligned} 36 \sum_{i=1}^{n-1} i &= S + 28(x_1 + x_{n-1}) + 21(x_2 + x_{n-2}) + 15(x_3 + x_{n-3}) + \\ &10(x_4 + x_{n-4}) + 6(x_5 + x_{n-5}) + 3(x_6 + x_{n-6}) + (x_7 + x_{n-7}) \geq \\ &\frac{1}{2} [(7n - 36 + t)(7n - 35 + t) + (n - t + 1)(n - t)] + 2 \times 28 + 4 \times \\ &2 + 15 \times 6 + 10 \times 8 + 6 \times 10 + 3 \times 12 + 14 \quad (13) \end{aligned}$$

上式右端是 t 的增函数, 当 $n \geq 22, 0 \leq t \leq n$ 时(13)并且 $|E(\overline{C_n})| = \binom{n}{2} - n, \sum_{i=1}^{n-1} x_i = |E(\overline{C_n})|$, 取 $t = 0$, 便有

$$36[\binom{n}{2} - n] \geq \frac{1}{2} [(7n - 36)(7n - 35) + (n + 1)n] + 420,$$

化简后有 $7n^2 - 194n + 105 \leq 0$ (13)

该不等式与 $n \geq 22$ 矛盾(13)证毕(13)

参 考 文 献

- 1 马克杰 19优美图 19北京: 北京大学出版社, 1991
- 2 F·哈拉里. 图论 19上海: 上海科技出版社, 1980
- 3 J·A·Gallin, A Survey 19Recent Results, Conjectures, and Open Problems in Labeling graphs. J. Graph Theory, Vol. 13 No. 4 491~504(1989)

(下转第86页)

显提高跨栏跑的成绩. 并且由于提高了摆动腿的过栏技术, 减少了摆动腿踢栏、踩栏的次数, 从而对学生克服畏难、害怕的心理起到重要作用. 同时, 在跨栏教学中, 对摆动腿前摆、伸小腿、下压、扒地等有关的髋关节的灵活性, 腹肌、股四头肌加强训练, 增强力量, 为更好掌握摆动腿过栏技术创造条件, 也是必须的.

总之, 只要广大体育教师在跨栏跑过栏技术的教学中, 采用分析启发学生思维与强化诱导学生练习相结合, 来指导教学工作, 就能取得较好的教学效果.

参 考 文 献

- 1 全国体育学院教材委员会组编. 田径. 北京: 人民体育出版社, 1991

(上接第78页)

The Upper Bound on Number of Edges of a Graceful Graph

Xie Wenhua

(Basic Courses Department)

Abstract In this paper, we prove that the maximum number of edges of a graceful graph of order n , $f(n) < \binom{n}{2} - n$, if $n \geq 25$, and discuss the gracefulness of complement of cycle.

Key words graph; graceful graph; graceful labeling; cycles; complement of graph