第14卷第1期
1997年3月
Journal of East China Jiaotong University
Vol.14 No.1
Mar. 1997

关于集控制集的若干结论*

于崇智

(基础课部)

摘　要　设图 $G=(V,E)$. 一子集 $D\subset V$，若对任何 $X\subset V-D$，都存在一个非空子集 $Y\subset D$，使得导出子图 $\langle X\cup Y\rangle$ 连通，则称 D 为 G 的集控制集(sd－集). G 的集控制数 $\gamma_s(G)$ 是 G 的集控制集的最小基数. 基数为 $\gamma_s(G)$ 的集控制集称为 G 的最小集控制集. 本文讨论了割点属于 G 的任一最小集控制集的必要条件，并且给出了 G 有独立集控制集的充要条件.

关键词　图；集控制集；割点；最小集控制集；独立集控制集

分类号　O157.5

0　引　言

设图 $G=(V,E)$. 一子集 $D\subset V$，若对 $V-D$ 中的任一顶点 u，均有 D 内的某些顶点与 u 邻接，则称 D 为 G 的一个控制集. 文献[1]中提出了控制集的一个等价定义：一子集 $D\subset V$，若对 $V-D$ 中的任一单点子集 $\{u\}$，至少存在 D 内的一个单点子集 $\{v\}$，使导出子图 $\langle\{u,v\}\rangle$ 连通，则称 D 为 G 的一个控制集.

一子集 $D\subset V$，若对 $V-D$ 的任一子集 X 均存在一个非空子集 $Y\subset D$，使导出子图 $\langle X\cup Y\rangle$ 是连通的，则称 D 为 G 的一个集控制集(set－dominating set)，简称为 sd－集. 图 G 的一个 sd－集的的最小基数称为 G 的集控制数(set－domination number)，记为 $\gamma_s(G)$. 基数为 $\gamma_s(G)$ 的集控制集称为 G 的最小集控制集，简称为 γ_s－集.

G 的一个集控制集 D 又是独立集，则称 D 是 G 的一个独立集控制集.

本文中提及的图均为有限简单无向图. 文中没有定义的术语和符号见文献[2].

1　割点与 γ_s－集

文献[3]中已给出一子集 D 为 G 的 sd－集的充要条件，即

引理1　图 $G=(V,E)$. 若一子集 $D\subset V$，则 D 是 G 的一个 sd－集的充要条件是

收稿日期：1996-3-25.　　于崇智，男. 1946年生，副教授.

* 江西省自然科学基金项目

(1) D 为 G 的一个控制集;

(2) $\forall u,v\in V-D, uv\notin E(G)$,则存在一条 D 内的 $u-v$ 通路.

从引理1可得

引理2　G 是有割点的连通图. D 是 G 的一个 γ_s-集. 若割点 $v\in D$,设

$$G-v=F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_r,$$

其中 $F_i(i=1,2,\cdots,r)$ 均为 $G-v$ 的连通分支,则 $\forall u_i\in F_i$ 且 $u_i\in V-D$,必存在 u_i 到 v 的 D 内通路.

证明　由引理1, $G-v$ 的不同分支中不属于 D 的顶点间必有一条 D 内通路,因为 v 为割点,故此通路必过割点 v.

文献[1]中提出二个公开问题,其中第二个问题是:一个割点在 G 的任何一个 γ_s-集中的必要条件是什么?对此,我们有

定理1　若 $G=(V,E)$ 是有割点 v 的连通图,割点 v 属于 G 的任何一个 γ_s-集 D,则 $G-v$ 的任一连通分支中至少有一点不属于 D.

证明　设 $G-v=F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_r$,其中 $F_r(i=1,2,\cdots,r)$ 均为 $G-v$ 的连通分支. 已知 D 是 G 的任何一个 γ_s-集,且 $v\in D$.

我们用反证法. 假设存在一个 $G-v$ 的连通分支,不妨设为 F_1, $\forall u\in F_1$,有 $u\in D$. 在 F_1中任意取定一点 u,记 $D'=D-\{u\}$. 我们来证明 D' 是 G 的 $sd-$集. 分成两种情况讨论.

情况1　若 F_1为单点子集 $\{u\}$.

因为 G 连通,所以 $uv\in E(G)$. 因为 $v\in D$,所以 $v\in D'=D-\{u\}$. 在 G 中 v 控制 u.

因为 D 为 γ_s-集,即为 $sd-$集. 由引理1, D 为 G 的控制集. $\forall x\in F_i(i=2,3,\cdots,r)$ 且 $x\notin D$,至少必存在一点 $z\in D$ 且 $z\notin F_1$,使 $xz\in E(G)$. 所以 $z\in D'=D-\{u\}$. 所以 D' 为 G 的控制集. 显然, $\forall x,y\in F_i(i=2,3,\cdots,r)$,且 $x,y\notin D$,存在 $x-y$ 的 D 内通路,即 D' 内通路. 只要证 u 与 x 间存在 D' 内通路即可. 事实上,由引理2,存在 x 到割点 v 间的 D 内通路,因为 $x\in F_i(i=2,3,\cdots,r)$,所以该通路即为 D' 内通路. 又因为 $uv\in E(G)$,所以 $x-u$ 间存在 D 内通路,即 D' 内通路. 由引理1, D' 为 G 的 $sd-$集.

情况2　若 F_1为非单点子集.

由假设 F_1是 $G-v$ 的一个非空连通分支. 所以至少存在一点 $\omega\in N(u)$,由反证法假设, F_1中任何一点都属于 D,所以 $\omega\in D'=D-\{u\}$. 在 G 中 ω控制 u. 又因为 F_1连通,显然存在 $u-v$ 间的 D 内通路,即 D' 内通路. $\forall x\in F_i(i=2,3,\cdots,r)$ 且 $x\notin D'=D-\{u\}$,由引理2,存在 $x-v$ 间的 D 内通路,即 D' 内通路,两条通路相连结于 v,即为 $x-u$ 间的 D' 内通路. 由引理1, D' 是 G 的 $sd-$集.

因为 $|D'|=|D|-1<|D|=\gamma_s(G)$,这与已知 D 是 G 的一个 γ_s-集,即最小集控制集矛盾,故证.

从定理1可得到下面推论.

推论1　G 是有割点 v 的连通图. D 是 G 的一个 γ_s-集,若 $v\notin D$,则 $G-v$ 的分支中至多只有一个分支含有不属于 D 的点.

证明　假设 $G-v$ 中有二个分支含有不属于 D 的顶点,记为 x,y. 因 G 连通,属于 $G-v$ 的不同分支的 x,y 间存在 $x-y$ 的 D 内通路. 已知 v 为割点,故 x,y 间的任一通路必经过 v,但 v

$\notin D$,矛盾.

设 G 是有割点的连通图. D 是 G 的一个 γ_s-集,易见子图 $\langle D\rangle$ 不必连通. 文献[1]中有

引理3　设 G 是有割点的连通图,则存在一个包含 G 的所有割点的 γ_s-集.

但我们进一步得到

定理2　G 是有割点的连通图,则存在一个包含 G 的所有割点的连通 γ_s-集.

证明　由引理3,设 D 是 G 的一个包含 G 的所有割点的 γ_s-集. v 是 G 的一个割点, $v\in D$. 从定理1,若 $G-v=F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_r$,则 $F_i\,(i=1,2,\cdots,r)$ 都存在不属于 D 的顶点. 如果 D 不连通,则至少存在 $G-v$ 的一个分支,不妨设为 F_1,而 F_1 中必有顶点 $u\in D$,使 $u-v$ 间没有 D 内通路. 因为 G 连通,在 u,v 间的任一条通路 $uw_1w_2\cdots w_sv$ 上,至少有一点 w_i 不属于 D.

现证 u,v 间必存在一条通路 P,使 P 上仅有一点 $w_i\in V-D$. 从引理2,因 v 为 G 的割点,且 $v\in D$,则必存在 w_i 到 v 的 D 内通路,因此 $w_{i+1},w_{i+2},\cdots,w_s$ 都属于 D.

另外设 P 上离 u 最近但又不属于 D 的顶点为 w_j, $j<i$,由引理2,存在 w_j 到 v 的 D 内通路 P_1,故 u 到 v 的通路可选择 u 经 P_1 到 w_j,再由 w_j 经 P_1 到 v,此时 $w_1,w_2,\cdots,w_{j-1}\in D$. 我们总能假设存在 u,v 间的通路 $P=uw_1w_2\cdots w_sv$,使 P 上仅一点 $w_i\in V-D$.

记 $D'=(D-\{u\})\cup\{w_i\}$. 因 $|D'|=|D|=\gamma_s(G)$,可验证 D' 为 G 的一个 γ_s-集,仍包含 G 的所有割点. 因 G 为有限图,所以 $G-v$ 的每一个分支中属于 D 但和 v 间没有 D 内通路的顶点数也有限,上述这种交换 D 内外顶点的步骤可继续进行,直至 $\forall u\in D$,都和割点 v 间存在 D 内通路. 这个 γ_s-集必定连通,且包含 G 的所有割点,证毕.

2　独立集控制集

文献[1] 中给出了 G 有独立集控制集的必要条件,即 G 的直径不大于4,并指出其逆不一定成立. 但我们有

定理3　连通图 $G=(V,E)$ 有独立集控制集 D 的充要条件是

(1)　D 是 G 的一个独立控制集;

(2)　$\forall u,v\in V-D$,且 $uv\notin E$,则存在顶点 $w\in D$,使 $uw\in E$, $vw\in E$.

证明　必要性　因为 D 为 G 的一个集控制集,故 D 必为 G 的控制集. 已知 D 独立,所以 D 是 G 的一个独立控制集.

$\forall u,v\in V-D$,且 $uv\notin E$,由引理1,存在一条 u,v 间的 D 内通路 P,记

$$P=uw_1w_2\cdots w_sv,$$

其中 $w_i\in D\,(i=1,2,\cdots,S)$. 若 $S\neq 1$,则与 D 为独立集矛盾,所以 $S=1$,必要性得证.

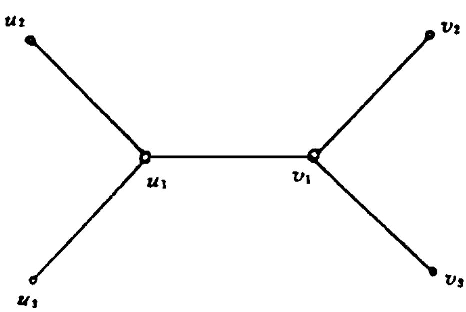

图1　双星图 G

充分性由独立集控制集的定义和引理1立证.

G 有独立集控制集,但不一定有独立 γ_s-集. 如图1中的双星图 G. G 有独立集控制集 $\{u_1,v_2,v_3\}$,但唯一的 γ_s-集 $\{u_1,v_1\}$ 不独立.

参 考 文 献

1 Sampathkumar·E,Pushpa Latha·L·Set Domination in Graphs·Journal of Graph Theory·1994,18(5):489～495

2 邦迪 J·A,默蒂 U·S·R·图论及其应用:吴望名等译·北京:科学出版社,1984.284

3 于崇智·图的集控制数·华东交通大学学报·1995,12(4):76～78

Some Results about Set Dominating Set

Yu Chongzhi

(Basic Courses Department)

Abstract Let $G(V,E)$ be a graph·A set $D\subseteq V$ is a set-dominating set(sd-set) if for every set $X\subseteq V-D$,there exists a nonempty set $Y\subseteq D$,such that the subgraph $\langle X\cup Y\rangle$ induced by $X\cup Y$ is connected·The set-domination number $\gamma_s(G)$ is the minimum cardinality of a sd-set·In this paper,a necessary condition that a cut vertex belongs to every γ_s-set of G is discussed,and a necessary and sufficient condition of existing indepedent set-dominating set in G is given·

Key words graph;set dominating set;cut vertex;minimum set dominating set;indepedent set dominating set