

关于对称结构固有频率的讨论

圣小珍

(土木工程系)

摘 要 对称结构的特征问题(求固有频率和振型)可化简为对称和反对称半边结构的特征问题来讨论,弄清楚各个固有频率应由哪半边结构来确定在理论上具有重要意义^[1]。本文对此予以初步探讨并着重指出了判别对称结构的基频应由哪半边结构决定的四个准则^[1]。

关键词 固有频率;振型;对称结构

分类号 TU 311.3

0 引 言

以图 1(a)所示平面刚架——集中质量系统为例^[1]结构的刚度、几何尺寸、约束及质量关于轴 1-1 对称^[1]。设该结构具有 N 个自由度,广义坐标记为 q_i ($i=1, 2, \dots, N$)^[1]。凡不在对称线上的处于对称位置的的质量的广义坐标分别记为 q_l, q_{N-l+1} (或 q_l, q_{N-l+1}) ($l, l'=1, 2, \dots, I, I>0$), 且方向对称^[1]。对于位于对称线上的质量,其垂直于对称线的广义坐标记为 q_m 或 $q_{m'}$ ($m, m'=I+1, I+2, \dots, I+J, J\geq 0$), 而沿着对称线的广义坐标记为 q_n 或 $q_{n'}$ ($n, n'=I+J+1, \dots, I+J+L, L\geq 0$)^[1]。显然 $2I+J+L=N$ ^[1]。对于如此选择的广义坐标,由结构动力学^[1]或文献[2]知,结

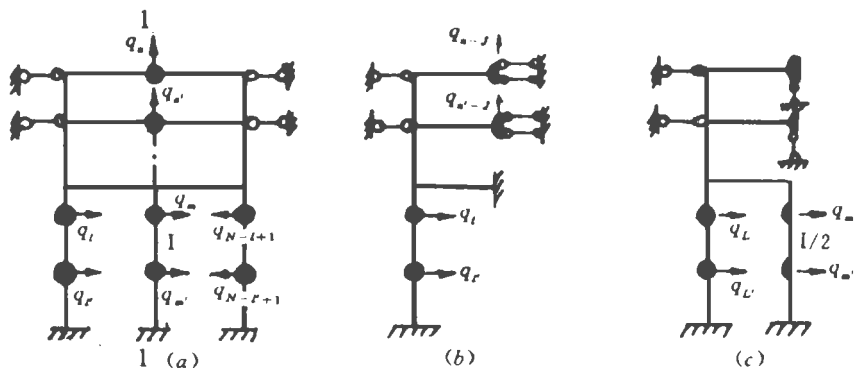


图 1 平面刚架

构的振型由如下正对称振型

$$x^+ = (x_1^+, x_2^+, \dots, x_I^+, 0, 0, \dots, 0, x_{I+1}^+, x_{I+2}^+, \dots, x_{I+L}^+, x_I^+, x_{I-1}^+, \dots, x_1^+)^T \quad (1)$$

J 个

和反对称振型

$$x^- = (x_1^-, x_2^-, \dots, x_I^-, x_{I+1}^-, \dots, x_{I+J}^-, 0, 0, \dots, 0, -x_I^-, -x_{I-1}^-, \dots, -x_1^-)^T \quad (2)$$

L 个

组成,而向量

$$(x_1^+, x_2^+, \dots, x_I^+, x_{I+1}^+, \dots, x_{I+L}^+)^T$$

和

$$(x_1^-, x_2^-, \dots, x_I^-, x_{I+1}^-, \dots, x_{I+J}^-)^T$$

分别是由图 1(b) 所示的正对称半边结构和图 1(c) 所示的反对称半边结构所决定的振型^[13]

各阶固有频率应由哪个半边结构来确定,这是一个具有重要理论意义的问题^[13]本文试图回答这一问题,并着重指出了判别对称结构的基频应由哪半边结构决定的四个准则^[13]

1 主要结果

令 $[M]$, $[K]$, $[\delta]$ 分别表示整个对称结构的质量矩阵、刚度矩阵和柔度矩阵,它们都是 $N \times N$ 阶的; $[M^+]$, $[K^+]$, $[\delta^+]$ 分别表示正对称半边结构的质量矩阵、刚度矩阵和柔度矩阵,它们都是 $(I+L) \times (I+L)$ 阶的; $[M^-]$, $[K^-]$, $[\delta^-]$ 分别表示反对称半边结构的质量矩阵、刚度矩阵和柔度矩阵,它们都是 $(I+J) \times (I+J)$ 阶的^[13]又令整个结构的(圆)频率谱是 $\Omega = \{\omega \leq \omega \leq \dots \leq \omega\}$, 正对称半边结构的频率谱是 $\Omega^+ = \{\omega^+ \leq \omega^+ \leq \dots \leq \omega_{I+L}^+\}$, 反对称半边结构的频率谱是 $\Omega^- = \{\omega^- \leq \omega^- \leq \dots \leq \omega_{I+J}^-\}$ 显然 $\Omega^+ \cup \Omega^- = \Omega$ ^[13]我们有

定理 1 设 $[\delta][M] = (h_{ij})_{N \times N}$ 的一切元素大于零,则 $\omega \in \Omega^+$ ^[13]

证 最低固有频率 ω 和振型 x 由下式决定

$$\left[\frac{1}{\omega^2} [E] - [\delta][M] \right] x = 0, \quad x \in R^N, \quad (3)$$

其中 $[E]$ 是 $N \times N$ 阶单位矩阵^[13]设 $x^T x = 1$, 则^[3]

$$\frac{1}{\omega^2} = x^T [\delta][M] x \geq y^T [\delta][M] y, \quad (4)$$

其中 y 是任意 N 维向量,且 $y^T y = 1$ ^[13]令 x 中大于或等于零的分量的脚标为 i^+, j^+ , 小于零的分量的脚标为 i^-, j^- , 则有

$$\frac{1}{\omega^2} = x^T [\delta][M] x = \sum_{i^+} \sum_{j^+} h_{i^+j^+} x_{i^+} x_{j^+} + \sum_{i^-} \sum_{j^-} h_{i^-j^-} x_{i^-} x_{j^-} + \sum_{i^+} \sum_{j^-} h_{i^+j^-} x_{i^+} x_{j^-} + \sum_{i^-} \sum_{j^+} h_{i^-j^+} x_{i^-} x_{j^+},$$

现取 $y = (|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|)^T$, 显然 $y^T y = 1$, 且

$$R = y^T [\delta][M] y = \sum_{i^+} \sum_{j^+} h_{i^+j^+} |x_{i^+}| |x_{j^+}| + \sum_{i^-} \sum_{j^-} h_{i^-j^-} |x_{i^-}| |x_{j^-}| + \sum_{i^+} \sum_{j^-} h_{i^+j^-} |x_{i^+}| |x_{j^-}| + \sum_{i^-} \sum_{j^+} h_{i^-j^+} |x_{i^-}| |x_{j^+}|$$

$$= \sum_{i^+} \sum_{j^+} h_{i^+j^+} x_{i^+} x_{j^+} + \sum_{i^-} \sum_{j^-} h_{i^-j^-} x_{i^-} x_{j^-} - \sum_{i^+} \sum_{j^-} h_{i^+j^-} x_{i^+} x_{j^-} - \sum_{i^-} \sum_{j^+} h_{i^-j^+} x_{i^-} x_{j^+} \quad (13)$$

故

$$R - \frac{1}{\omega} = -2 \sum_{i^+} \sum_{j^-} h_{i^+j^-} x_{i^+} x_{j^-} - 2 \sum_{i^-} \sum_{j^+} h_{i^-j^+} x_{i^-} x_{j^+} \quad (5)$$

$$= 2 \sum_{i^+} \sum_{j^-} h_{i^+j^-} |x_{i^+}| |x_{j^-}| + 2 \sum_{i^-} \sum_{j^+} h_{i^-j^+} |x_{i^-}| |x_{j^+}| \quad (13)$$

因此, 只要有 i^+ 或 j^+ 使得 $x_{i^+} \neq 0$ 或 $x_{j^+} \neq 0$, 则由式(5)便有 $R > \frac{1}{\omega}$, 这就违反了不等式(4)(13)故 ω 对应的振型 x 的分量必取同一符号或取零(13)而当 $\omega \in \Omega^-$ 时, 由式(2)知, 对应的振型必有异号的振型分量, 故 $\omega \in \Omega^+$ (13)

定理 2 设 $[M]$ 是对角阵, 对一切 $i \neq j$ 有 $k_{ij} < 0$, 此处 k_{ij} 是 $[K]$ 的元素, 则 $\omega \in \Omega^+$ (13)

证明方法与定理 1 类似, 此处略(13)

定理 3 设 $N = 2I$, 即 $J = L = 0$, $[M]$ 为对角阵(13)又令 $[G] = (k_{i, N-j+1})_{i=1,2,\dots,I}^{j=1,2,\dots,I}$, $[H] = (k_{ij})_{i=1,2,\dots,I}^{j=1,2,\dots,I}$ (13)如果矩阵 $[G]$ 常负, 则 $\omega^+ \leq \omega^-$ ($i = 1, 2, \dots, I$), 特别有 $\omega \in \Omega^+$; 如果矩阵 $[G]$ 常正, 则 $\omega^+ \geq \omega^-$ ($i = 1, 2, \dots, I$), 特别有 $\omega \in \Omega^-$ (13)

证明 不难验证, 此时正对称半边结构的质量矩阵 $[M^+]$ 与反对称半边结构的质量矩阵 $[M^-]$ 是相等的, 而它们的刚度矩阵分别为

$$\begin{cases} [K^+] = [H] + [G], \\ [K^-] = [H] - [G] \end{cases} \quad ([G] \text{ 是对称的}) \quad (6)$$

考察特征问题

$$(-\omega^2 [M^+] + [H] + [G])u = 0, \quad u \in R^I, \quad (7)$$

$$(-\omega^2 [M^-] + [H] - [G])u = 0, \quad u \in R^I \quad (8)$$

上两式可合写成为

$$(-\omega^2 [M^+] + [H] + \eta [G])u = 0 \quad (13) \quad u \in R^I \quad (9)$$

其中 η 是参数(13) $\eta = 1$ 则得式(7), $\eta = -1$ 则得式(8)(13)由式(9)求出的第 i 个固有频率 ω_i 显然是 η 的函数, 对应的振型 u_i 是 η 的函数(13)即 $\omega_i = \omega_i(\eta)$, $u_i = u_i(\eta)$, 于是式(9)成为

$$(-\omega_i^2(\eta) [M^+] + [H] + \eta [G])u_i(\eta) = 0 \quad (13) \quad (10)$$

把式(10)两边转置得

$$u_i^T(\eta) (-\omega_i^2(\eta) [M^+] + [H] + \eta [G]) = 0 \quad (11)$$

式(10)两边对 η 求得

$$\left\{ -\frac{d\omega_i^2(\eta)}{d\eta} [M^+] + [G] \right\} u_i(\eta) + (-\omega_i^2(\eta) [M^+] + [H] + \eta [G]) \frac{du_i(\eta)}{d\eta} = 0 \quad (13)$$

上式两边左乘 $u_i^T(\eta)$, 并注意式(11)有

$$u_i^T(\eta) \left\{ -\frac{d\omega_i^2(\eta)}{d\eta} [M^+] + [G] \right\} u_i(\eta) = 0 \quad (13)$$

即

$$\frac{d\omega_i^2(\eta)}{d\eta} = \frac{u_i^T(\eta)[G]u_i(\eta)}{u_i^T(\eta)[M^+]u_i(\eta)} \quad (12)$$

由此可知, 当 $[G]$ 常负时, $\frac{d\omega_i^2(\eta)}{d\eta} \leq 0$, 从而 $\omega_i^2(-1) \geq \omega_i^2(1)$, 即由式(7)决定的第 i 个固有频率比由式(8)决定的第 i 个固有频率来得小, 故 $\omega \in \Omega^+$ 当 $[G]$ 为常正时, $\frac{d\omega_i^2(\eta)}{d\eta} \geq 0$, 从而 $\omega_i^2(-1) \leq \omega_i^2(1)$, 即由式(7)决定的第 i 个固有频率比由式(8)决定的第 i 个固有频率来得大, 故 $\omega \in \Omega^-$ (13)

定理 4 设 $\sum_{i=2}^N \frac{1}{\omega_i^2} < \frac{1}{\omega^2}$ 成立(对实际中的大多数结构, 此条件确实成立), 则 $\omega \in \Omega^+(\Omega^-)$ 的充要条件是

$$tr([\delta^+][M^+]) > (<) tr([\delta^-][M^-]), \quad (13)$$

此处 $tr([A])$ 表示矩阵 $[A]$ 的迹, 即主对角元素之和(13)

证明 因为 $\omega, \omega^+, \omega^-$ 分别满足下列三式

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\omega^2} [E] - [\delta] [M] \right| &= 0, \\ \left| \frac{1}{(\omega^+)^2} [E] - [\delta^+] [M^+] \right| &= 0, \\ \left| \frac{1}{(\omega^-)^2} [E] - [\delta^-] [M^-] \right| &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

故

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_i^2} &= tr([\delta] [M]), \\ \sum_{i=1}^{+1} \frac{1}{(\omega_i^+)^2} &= tr([\delta^+] [M^+]), \\ \sum_{i=1}^{+1} \frac{1}{(\omega_i^-)^2} &= tr([\delta^-] [M^-]) \end{aligned} \quad (13)$$

如果 $\omega \in \Omega^+$, 则

$$tr([\delta^+] [M^+]) = \sum_{i=1}^{+1} \frac{1}{(\omega_i^+)^2} \geq \frac{1}{\omega^2} > \sum_{i=2}^N \frac{1}{\omega_i^2} \geq \sum_{i=1}^{+1} \frac{1}{(\omega_i^-)^2},$$

即

$$tr([\delta^+] [M^+]) > tr([\delta^-] [M^-]) \quad (14)$$

反过来, 如果式(14)成立, 则有 $\omega \in \Omega^+$ (13) 否则 $\omega \in \Omega^-$, 将推出 $tr([\delta^+] [M^+]) < tr([\delta^-] [M^-])$, 与式(14)矛盾(13)

举例

如图 2 所示三铰刚架, 选择广义坐标 q^1, q^2, q^3, q^4 (13) 其正对称半边结构的质量矩阵和柔度矩阵分别是

$$[M^+] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix}, \quad [\delta^+] = \frac{mL^3}{EI} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

反对称半边结构的质量矩阵和柔度矩阵分别是

$$[M^-] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix}, \quad [\delta^-] = \frac{ml^3}{EI} \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{bmatrix} \quad (13)$$

于是 $tr([\delta^+][M^+]) = \frac{2}{3} \frac{ml^3}{EI}$, $tr([\delta^-][M^-]) = \frac{11}{3} \frac{ml^3}{EI}$; 因此由定理 4 知此结构的最低固有频率 $\omega \in \Omega^-$, 即由反对称半边结构决定⁽¹³⁾可以算出,

$$\omega^+ = 1.316 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}, \quad \omega^+ = 3.333 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} \quad (13)$$

$$\omega^- = 0.526 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}, \quad \omega^- = 4.152 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} \quad (13)$$

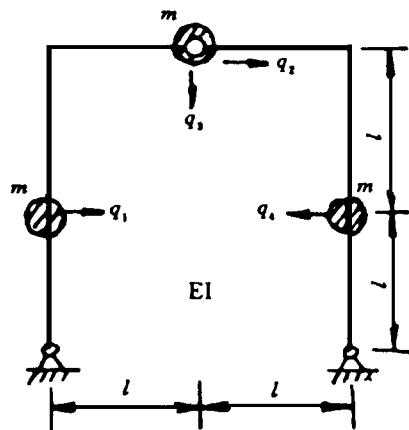


图 2 三铰刚架

2 结束语

本文给出了判别对称结构的基频由哪半边结构决定的四个准则⁽¹³⁾由于对称(或近似对称)的结构在工程上是广泛存在的,故不论是从理论上还是从工程应用上来讲,本文的结果是有价值的⁽¹³⁾

参 考 文 献

- 1 王光远⁽¹³⁾建筑结构的振动⁽¹³⁾北京:科学出版社,1973
- 2 圣小珍,徐玉华⁽¹³⁾中心对称矩阵及其性质⁽¹³⁾华东交通大学学报,1996,13(2):31~36
- 3 吴福光等⁽¹³⁾振动理论⁽¹³⁾北京:高等教育出版社,1987,155~162

Discussion about the Natural Frequencies of a Symmetric Structure

Sheng Xiaozhen

(Civil Engineering Department)

Abstract It is well known that the eigen-problem of a symmetric structure can be solved by solving the eigen-problems of its two half structures. It is theoretically important to understand which half structure should be taken into account to calculate a natural frequency. And it is discussed with propounding of the four criteria to decide which half structure determines the first or the lowest natural frequency.

Key words natural frequency; modal vector; symmetric structure