

转盘上的流水作业问题^{*}

徐平生

俞文?

(基础课部)

(华东理工大学应用数学所)

摘 要 讨论转盘上的流水作业问题, 其中每个加工工件从一个工序到下一个工序需要用此转盘来运输, 而且从入口到第一个加工机器和从最后一个加工机器返回工件入口, 也要用此转盘来运输. 在本文中, 我们证明, 即使只有一台加工机器, 带有转盘的流水作业的加工全长问题也是强 NP 困难的.

关键词 流水作业; 运输转盘; 加工全长; NP 困难; 三元划分

分类号 O 224

0 引 言

流水作业问题是运筹学中时间表理论的重要组成部分. 以自动化流水线的某些布局为背景, 我们讨论流水作业问题的下列扩充形式.

设在一个以顺时针运转的转盘上装有一个运输工具 M_0 , 转盘周围依次有一个入口(储料点)及 m 台机器 $M_1, M_2, \dots, M_m$. 设在入口有 n 个工件, 由 M_0 运至 M_1 加工, 运转时间为 t_0 , 加工完后再由 M_0 运至 M_2 加工, 运转时间为 $t_1, \dots$, 这样依次在 $M_2, \dots, M_m$ 上加工完后最终由 M_0 运回入口, 运转时间为 t_m , 工件 j 在 M_i 上的工时是已知的. 又设 M_0 每次至多运送一个工件, M_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 在同一时间只能加工一个工件, M_i 处允许工件无限制缓冲存放. 问题是如何合理安排工件的加工顺序和转盘的运转, 使加工全长(即最后一个完工工件的完工时间)达到最小. 我们把这一时间表问题简记为 Tm .

作为本文的主要结果, 我们证明问题 $T1$ 是强 NP 困难的, 也就是说, 即使加工机器数为 1, 转盘上的流水作业问题也是强 NP 困难的. 从而, 进一步的研究课题应该是寻找具有良好性能的近似算法.

Tm 类似于经典的流水作业问题 $F(m+1)$ 的一种扩充, 每个工件要用 M_0 做 $(m+1)$ 次操作, 或者说, 每个工件要重复 m 次进入 M_0 进行“加工”. 在 $m=1$ 的情形, 上述 $F2$ 的扩充被称为 V 形流水作业, Lev 和 Adiri 在文献[2]中已表明, 二台机器情形流水作业(记为 $V2$) 为 NP 困

收稿日期: 1997-01-13. 徐平生, 男, 1964 年生, 讲师.

^{*} 国家自然科学基金资助项目

难的. 这里, 我们将此结果和本文的结果作比较如下. 首先, 在 $T1$ 中, 工件在 M_0 上的“加工”时间(实为转盘运输时间) 分别为二个常数, 而在 $V2$ 中它们是任意的, 这说明 $T1$ 具有更多的限制; 其次, 在 $T1$ 中 M_0 上二个同等的转盘运输之间必须有一个转移时间, 而 $V2$ 中却没有这样的时间; 最后, $V2$ 的强 NP 困难性仍然不明, 见文献[3], 而我们在本文中证明 $T1$ 是强 NP 困难的.

1 预备知识

这一节我们先分析 $T1$ 问题的特点, 然后给出关于 $T1$ 问题的两个引理. 这里, 我们指出以下 (1) – (3):

- (1) 对于每个工件 j 依次均有三个操作, 分别是工件 j 由 M_0 从入口运至 M_1 处(记为 O_{1j}), 在 M_1 上加工(记为 O_{2j}), 完工后运回至入口(记为 O_{3j}), 其中在 M_0 上操作二次.
- (2) 相邻的 O_{1i} 和 O_{1j} 之间有一个转移时间, 同样地, O_{3i} 和 O_{3j} 之间也有一个转移时间.
- (3) 任何 O_{1i} 的“加工”时间均相同, 设为 t_0 , 任何 O_{3i} 的“加工”时间均相同, 设为 t_1 . 同时, 每个 O_{2i} 的加工时间设为 $p_i (i = 1, 2, \dots, n)$. 我们还记:

$$T = t_0 + t_1,$$

$$A = \{j \mid p_j \geq T, j = 1, 2, \dots, n\},$$

$$B = \{j \mid p_j < T, j = 1, 2, \dots, n\}.$$

因为第一道工序的工时为 t_0 , 最后一道工序的工时为 t_1 , 而 M_1 加工 n 个工件所需时间至少为 $(p_1 + p_2 + \dots + p_n)$, 所以易得下列引理.

引理 1 对于 $T1$ 问题的任意一个可行的时间表 S , 有

$$C[S] \geq T + \sum_{j=1}^n p_j$$

其中 $C[S]$ 表示对应于 S 的加工全长.

下面我们引入一个标准工件组的概念.

定义 若将 n 个工件的工件组分为 $r + 1$ 个子工件组, 设为 $A_0, A_1 \cup B_1, A_2 \cup B_2, \dots, A_r \cup B_r, A_i \subseteq A (0 \leq i \leq r), B_i \subseteq B (1 \leq i \leq r)$, 且满足条件:

- (1) A_0 是一个工时为 $2T$ 的工件;
- (2) 对于 $A_i \cup B_i (i \geq 1)$, 有

$$|A_i| T < \sum_{j \in A_i} p_j \leq (|A_i| + |B_i|) T, \quad (1)$$

$$\sum_{j \in A_i \cup B_i} p_j = (|A_i| + |B_i|) T. \quad (2)$$

则称该工件组为标准工件组, $A_i \cup B_i (i \geq 1)$ 为标准子工件组.

引理 2 对于 $T1$ 问题, 如果给定的 n 个工件是一个标准工件组, 那么存在一个最优时间表 S^* , 且有

$$C[S^*] = T + \sum_{j=1}^n p_j.$$

证明 对于 $T1$ 问题的时间表 S , 因为运送(或运回)工件的时间为常数, 显然我们可以要求运送(或运回)工件的顺序与在 M_1 加工工件顺序是一致的, 这不影响对应 S 的加工全长.

我们构造一个 S^* 如下:

- (1) 工件顺序按: $\tau = (A_0, B_1, A_1, B_2, A_2, \dots, B_r, A_r) \triangleq (\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(n))$;
- (2) 转盘不停地运转, 直到完成最后一道工序(见图1).

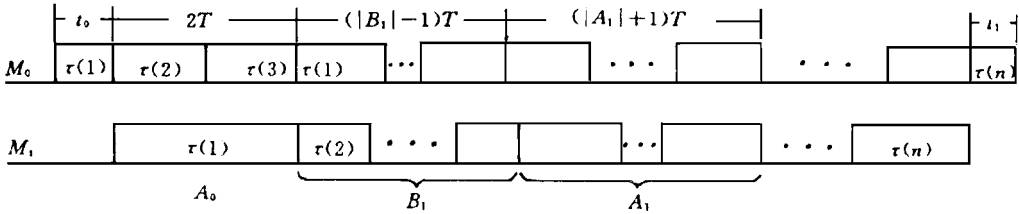


图1 S^* 的甘特图

若以 S_{ij} 、 C_{ij} 分别表示操作 O_{ij} ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, n$) 的开工、完工时间, 则对于一个可行的时间表 S 应满足

$$C_{1j} \leq S_{2j} \quad C_{2j} \leq S_{3j} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

下面我们验证 S^* 的可行性. 首先, 对于 A_0 有

$$C_{1\tau(1)} = t_0, \quad C_{2\tau(1)} = S_{2\tau(1)} + p_{\tau(1)} = t_0 + 2T.$$

于是可得

$$S_{2\tau(1)} = t_0 = C_{1\tau(1)}, \quad S_{3\tau(1)} = t_0 + 2T = C_{2\tau(1)}.$$

其次, 对于 $A_1 \cup B_1, \forall k \in A_1 \cup B_1$, 有

$$C_{1k} = t_0 + [\tau^{-1}(k) - 1]T,$$

其中 $\tau^{-1}(k)$ 表示工件 k 在序 τ 中的位置.

$$S_{2k} = t_0 + \sum_{j < \tau^{-1}(k)} p_{\tau(j)} = t_0 + 2T + \sum_{1 < j < \tau^{-1}(k)} p_{\tau(j)},$$

$$C_{2k} = S_{2k} + p_k = t_0 + 2T + \sum_{1 < j \leq \tau^{-1}(k)} p_{\tau(j)},$$

$$S_{3k} = t_0 + [\tau^{-1}(k) + 1]T.$$

由式(1)、(2)可得

$$\sum_{1 < j < \tau^{-1}(k)} p_{\tau(j)} \geq ([\tau^{-1}(k) - 2] - 1)T = [\tau^{-1}(k) - 3]T,$$

$$\sum_{1 < j \leq \tau^{-1}(k)} p_{\tau(j)} \leq [\tau^{-1}(k) - 1]T.$$

于是有

$$C_{1k} \leq S_{2k} \quad C_{2k} \leq S_{3k}.$$

且当 k 为 $B_1 \cup A_1$ 中最后一个工件时, $C_{2k} = S_{3k}$.

对于 $B_i \cup A_i$ ($i = 2, \dots, n$) 可类似地验证, 且有

$$S_{3\tau(n)} = C_{2\tau(n)} = t_0 + \sum_{j=1}^n p_j.$$

所以 $C[S^*] = C_{3 \uparrow n} = S_{3 \uparrow n} + t_1 = T + \sum_{j=1}^n p_j$.

由引理 1 知, S^* 为最优解.

[证毕]

2 从 3-P 问题作多项式时间归约

本文的主要结论为下列定理.

定理 1 时间表问题 $T1$ 是强 NP 困难的.

我们借助于从三元划分问题作多项式时间归约到 $T1$ 来证明这个定理, 可参见文献[1] 和 [4]. 我们知道三元划分问题(记为 3-P) 是强 NP 困难的, 其定义如下:

3-P: 给定一个正整数 T 和正整数集 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{3m}\}$ 满足

$$T/2 < x_i < T \quad (i = 1, 2, \dots, 3m), \quad \sum_{j=1}^{3m} x_j = 2mT, \quad (4)$$

问是否存在 X 的一个三元划分 $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ 使得

$$\sum_{x_j \in X_i} x_j = 2T \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (5).$$

若给定 3-P 的任意一个实例, 我们构造 $T1$ 问题的相应实例如下:

(1) $3m$ 个 B 工件, 有 $P_j = x_j, j = 1, 2, \dots, 3m$;

(2) $m + 1$ 个 A 工件, 有 $P_j = 2T, j = 3m + 1, 3m + 2, \dots, 4m + 1$.

设置阈值 $y = (n + 2)T$, 这里 $n = 4m + 1$. 若将其对应的判定问题表示为 $T1'$, 则可表述为

$T1'$: 存在一个时间表 S , 使 $C[S] \leq (n + 2)T$ 吗?

引理 3 若 3-P 问题的回答为“是”, 则 $T1'$ 的回答也为“是”.

证明 假设 3-P 问题的回答为“是”, 划分 $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ 满足式(5).

令

$$X_i = \{x_{\xi_i}, x_{\eta_i}, x_{\zeta_i}\} \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$A_i = \{3m + 1 + i\} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m),$$

$$B_i = \{\xi_i, \eta_i, \zeta_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

容易验证该工件组为标准工件组, 由引理 2 有,

$$C[S] = T + \sum_{j=1}^{4m+1} P_j = (4m + 3)T = (n + 2)T.$$

于是 $T1'$ 的回答也为“是”.

[证毕]

3 从某个时间表到三元划分

在本节中, 我们证明引理 3 的逆结论, 这就是以下的引理 4. 由引理 3 与引理 4, 便得到了上一节中所阐明的定理 1.

引理 4 若 $T1'$ 的回答为“是”, 则 3-P 问题的回答也为“是”.

证明 假设 $T1'$ 的回答为“是”, 即存在一个可行的时间表 S , 使得

$$C[S] \leq (n+2)T.$$

因为 A 工件的工时均为 $2T$, 所以我们不妨设 $(m+1)$ 个 A 工件按 $3m+1, 3m+2, \dots, 4m+1$ 的次序加工. S 中工件序设为 $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$, 由引理 1, 有

$$C[S] \geq T + \sum_{j=1}^{4m+1} p_j = (n+2)T.$$

由以上二式, 使得

$$C[S] = (n+2)T \quad (6)$$

对于这样的时间表 S 中的工件序 τ 不仅满足式 (3), 而且由式 (6) 我们可得以下二点.

首先, 机器 M_1 从第一个工件开始加工到最后一个工件完成加工不允许有空闲, 即

$$C_{2\tau_j} = S_{2\tau_{j+1}} \quad (j = 1, 2, \dots, n-1), \quad (7)$$

其次, 最后一道工序的完工时间为

$$C_{3\tau_n} = C[S] = (n+2)T, \quad (8)$$

于是, 关于 τ 我们可以断言:

(I) $\tau_1 \in A, \tau_n \in A$, 即 $\tau_1 = 3m+1, \tau_n = 4m+1$;

(II) 任意两个 A 工件 $3m+i$ 和 $3m+1+i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 之间有且仅有 3 个 B 工件, 不妨设为 $\xi_i, \eta_i, \varsigma_i$, 且有

$$p_{\xi_i} + p_{\eta_i} + p_{\varsigma_i} = 2T.$$

先论证断言 (I). 假设 $\tau_1 \notin A$, 则有 $p_{\tau_1} < T$, 从而

$$C_{2\tau_1} = t_0 + p_{\tau_1} < t_0 + T \leq S_{2\tau_2}.$$

这便与式 (7) 矛盾, 所以 $\tau_1 \in A$.

下面证 $\tau_n \in A$. 假设 $\tau_n \notin A$, 则有 $p_{\tau_n} < T$. 由于

$$\begin{aligned} C_{3\tau_n} &\geq C_{3\tau_{n-1}} + T, \\ C_{3\tau_{n-1}} &\geq T + \sum_{j=1}^{n-1} p_{\tau_j} > p_{\tau_n} + \sum_{j=1}^{n-1} p_{\tau_j} = (n+1)T, \end{aligned}$$

由以上二式, 可得

$$C_{3\tau_n} > (n+2)T.$$

这便与式 (8) 矛盾, 所以 $\tau_n \in A$.

再论证断言 (II). 由 $\tau_1 = 3m+1$, 有 $S_{3\tau_1} \geq 2T + t_0$, 故可得

$$C_{3\tau_1} = S_{3\tau_1} + t_1 \geq 3T.$$

由式 (8), 可得

$$C_{3\tau_n} - C_{3\tau_1} \leq (n+2)T - 3T = (n-1)T.$$

又因为

$$C_{3\tau_j} \geq C_{3\tau_{j-1}} + T \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

于是, 根据上面二式可得

$$C_{3\tau_j} = (j+2)T \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (9)$$

假设在工件 $3m+1$ 和 $3m+2$ 之间有工件组 B_1 (可为空集), 令 $k = \tau^{-1}(3m+2)$, 则 $k = |B_1| + 2, \tau_k = 3m+2$; 并以 $P(B_1)$ 表示 $\sum_{j \in B_1} p_j$. 我们对 $P(B_1)$ 分情况讨论如下.

(1) 若 $P(B_1) < 2T$, 由式(4) 可得, $|B_1| \leq 3$.

当 $|B_1| \leq 2$ 时,

$$C_{2\tau_k} = C_{2\tau_1} + P(B_1) + p_{\tau_k} = t_0 + 4T + P(B_1),$$

由式(3), 有 $S_{3\tau_k} \geq C_{2\tau_k}$, 则可得

$$C_{3\tau_k} = S_{3\tau_k} + t_1 \geq 5T + P(B_1) > (k+2)T,$$

这便与式(9) 矛盾.

当 $|B_1| = 3$ 时

$$S_{2\tau_k} \geq t_0 + (k-1)T = t_0 + 4T,$$

$$C_{2\tau_{k-1}} = t_0 + 2T + P(B_1) < t_0 + 4T.$$

由以上二式可得 $C_{2\tau_{k-1}} < S_{2\tau_k}$.

这便与式(7) 矛盾.

(2) 若 $P(B_1) > 2T$, 由式(4) 可得 $|B_1| \geq 3$.

当 $P(B_1) < (|B_1| - 1)T$ 时, 若在加工工件 τ_{k-1} 前 M_1 有空闲, 则与式(7) 矛盾, 否则有

$$C_{2\tau_{k-1}} = t_0 + 2T + P(B_1) < t_0 + (|B_1| + 1)T,$$

$$S_{2\tau_k} \geq t_0 + (k-1)T = t_0 + (|B_1| + 1)T.$$

于是得 $S_{2\tau_k} > C_{2\tau_{k-1}}$,

这便与式(7) 矛盾.

当 $P(B_1) > (|B_1| - 1)T$ 时,

$$C_{2\tau_{k-1}} = t_0 + 2T + P(B_1) > t_0 + (|B_1| + 1)T,$$

$$C_{2\tau_k} \geq C_{2\tau_{k-1}} + p_{\tau_k} > t_0 + (|B_1| + 3)T = t_0 + (k+1)T.$$

于是得 $C_{3\tau_k} \geq C_{2\tau_k} + t_1 > (k+2)T$.

这便与式(9) 矛盾.

当 $P(B_1) = (|B_1| - 1)T$ 时,

$$P(B_1) + p_{\tau_k} = (|B_1| + 1)T.$$

$B_1 \cup \{\tau_k\}$ 满足式(1)、(2) 为标准子工件组, 由引理2 证明中的结论可得

$$C_{3\tau_k} = (k+2)T.$$

由以上讨论我们可以知道, 对于 S 必有: $|B_1| \geq 3$ 且 $P(B_1) = (|B_1| - 1)T$. 又根据断言(1), $\tau_1 = 3m + 1$, $\tau_n = 4m + 1$, 所以 τ 的结构可设为 $\tau = (3m + 1, B_1, 3m + 2, B_2, 3m + 3, \dots, B_m, 4m + 1)$, 其中 B_i 可能是空集. 所以关于 τ 类似于 B_1 有, $|B_2| \geq 3, \dots, |B_m| \geq 3$ 且 $P(B_i) = (|B_i| - 1)T \quad (i = 2, \dots, m)$.

由于, $\sum_{i=1}^m |B_i| = 3m$, 但 $|B_i| \geq 3$, 则必有 $|B_i| = 3$, 且 $P(B_i) = 2T \quad (i = 1, 2, \dots, m)$, 即

$$p_{\xi_i} + p_{\eta_i} + p_{\varsigma_i} = 2T.$$

从而断言(II) 成立.

若令 $X_i = \{p_{\xi_i}, p_{\eta_i}, p_{\varsigma_i}\} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$.

于是我们便得到 3-P 问题的一个解, 即 3-P 问题的回答也为“是”.

[证毕]

参 考 文 献

- 1 M·R·Carey and D·S·Johnson·Computers and Intractability:A Guide to the Theory of NP-Completeness·Freeman·San Francisco, 1979
- 2 V·Lev, I·Adiri·V-shop scheduling·European Journal of Operational Research, 1984, 18;51~56
- 3 M·Y·Wang, S·P·Sethi and S·L·van de Velde·Minimizing makespan in a class of reentrant shops·preprint, 1995. 2~4
- 4 W·Yu·The two-machine flow shop problem with delays and the one-machine total tardiness problem·The Netherlands·Letru publishing House, 1996. 10~16

The Scheduling Problem of Flow Shops with a Transportation Turntable

Xu Pingsheng

(Basic Courses Department)

Yu Wenci

(Institute of Applied Mathematics, East China Science and technology University)

Abstract: This paper deals with the makespan problem of flow shops with a transportation turntable, which is used for moving the jobs from any machine to the next machine, for moving the jobs from the entrance to the first machine, and for moving the jobs from the last machine to the entrance back as well. It is proved that the problem is strangly NP-hard even if there is only one machine for processing. The result is obtained by using a reduction from the 3-Partition problem.

Key words flow shop; transportation turntable; makespan; NP-hard; 3-partition