

关于图的色数与围长^{*}

徐保根

胡立模

(基础课部)

(南昌市二十九中)

摘 要 设 $f(m, n)$ 表示色数为 m 、围长不小于 n 的图的最小阶数. 本文给出了 $f(m, n)$ 的下界, 并探讨了无三角形图色数的上界.

关键词 图; 色数; 围长; m -色临界图; 无三角形图

分类号 O157.5

本文所指的图均为无向简单图, 文中未说明的符号、术语同文献[1~2].

设 $G = (V, E)$ 是一个图, G 的(点)色数定义为 $\chi(G) = \min \{k: V(G) = \bigcup_{i=1}^k V_i, \text{ 满足 } V_i \cap V_j = \emptyset (i \neq j), G[V_i] \text{ 为无边图}\}$, 其中 $G[V_i]$ 为 V_i 在 G 中的导出子图. 显然, 一个图的色数不小于其任何子图的色数.

一个图被称为 m -色临界图, 如果 $\chi(G) = m$, 且对任意 $v \in V(G)$, 均有 $\chi(G - v) = m - 1$.

一个图 G 中最短圈的长度称为 G 的围长, 记为 $g(G)$. 如果 G 为森林(即为无圈图), 记 $g(G) = +\infty$. 如果 $g(G) \geq 4$, 称 G 为无三角形图.

Dirac^[3] 曾经问: 是否存在无三角形图而有任意大的色数? 这一问题早已被多位研究者所证实. P. Erdos^[4] 和 L. Lovasz^[5] 独立地推广了这一结论, 得到了如下结论(见文献[1]):

引理 1^[1] 对每两个正整数 m 和 n , 存在一个围长超过 n 的 m 色图.

为了进一步探讨这一问题, 定义($n \geq 3$) $f(m, n) = \min \{|V(G)|: \chi(G) = m \text{ 且 } g(G) \geq n\}$. 引理 1 确保了 $f(m, n)$ 的存在性, 但要求出 $f(m, n)$ 的确切值是困难的. 本文首先给出 $f(m, n)$ 的一个下界, 这也反映了色数与围长的关系. 其次探讨了无三角形图色数的上界.

设 G 为 $f(m, n)$ 阶图, $\chi(G) = m, g(G) \geq n$. 显然 G 是一个围长不小于 n 的 m -色临界图.

引理 2^[1] 设 G 为任意一个 m -色临界图, 则 G 的最小度 $\delta(G) \geq m - 1$.

引理 3^[1~2] 若连通图 G 不为奇圈或完全图, 则 G 的最大度 $\Delta(G) \geq \chi(G)$.

为了完整性, 我们先给出简单的情形.

定理 1 设 m 和 n 为正整数, 则

(1) 当 $m \leq 2$ 或 $n \leq 3$ 时, $f(m, n) = m$;

(2) 当 $n \geq 4$ 时, $f(3, n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. 其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示不大于 x 的最大整数.

证 (1) 当 $m \leq 2$ 或 $n \leq 3$ 时, 色数的 m 且围长不小于 n 的最小阶图为 K_m , 即 $f(m, n) = m$.

(2) 当 $m = 3$ 时, 色数为 3 的图必有一个奇圈, 由于其围长不小于 n , 故此图中最短奇圈的阶数至少为 $S = 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, 即为不小于 n 的最小奇数. 注意到 $n \geq 4$, 色数为 3 且围长不小于 n 的最小阶图为 C_S , 即 $f(3, n) = 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. 证毕.

由定理 1, 只需再考虑 $m \geq 4$ 且 $n \geq 4$ 的情形.

定理 2 设 $m \geq 4$ 和 $n \geq 4$ 均为整数, 则 $f(m, n) \geq \sum_{k=4}^m (k-1) \frac{[(k-2) \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1]}{k-3}$,

其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示不大于 x 的最大整数.

证 设 G 为 $f(m, n)$ 阶图, 且 $X(G) = m, g(G) \geq n$. 由 $f(m, n)$ 的定义知, G 为 m -色临界图. 再根据引理 2 得知 $\delta(G) \geq m-1$. 用 $d_G(x, y)$ 表示两点 x 和 y 在 G 中的距离. 设 v_0 是 G 中任意给定的一个顶点. 令 $S_i = \{v \in V(G) \mid d_G(v, v_0) = i\}$, 记 $S_0 = \{v_0\}$, $t = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$, 注意到 $t \geq 1$. 对于每一个 $i (1 \leq i \leq t)$, 由于 $g(G) \geq n$, 易见 S_i 中的任何两点在 G 中是不邻的. 令 $S = \bigcup_{i=0}^t S_i$. 因为当 $1 \leq i \leq t$ 时 $|S_i| \geq \delta(G-1)^{i-1} \geq (m-1)(m-2)^{i-1}$, 故

$$|S| \geq 1 + \sum_{i=1}^t (m-1)(m-2)^{i-1} = 1 + \frac{(m-1)[(m-2)^t - 1]}{m-3}.$$

令 $G_1 = G - S$ 表示 $V(G)/S$ 在 G 中的导出子图, 下面证明 $X(G_1) = m-1$.

由于 G 为 m -色临界图, 故 $X(G_1) \leq m-1$. 另一方面, 假设 $X(G_1) = l \leq m-2$, 令 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_l\}$ 为 l 种不同颜色的集合, 存在 G_1 的一个 l -着色映射 $\Phi: V(G_1) \rightarrow C$, 设 c_0 为一种新颜色, 如下定义 G 的 $(l+1)$ -着色映射 $\Phi: V(G) \rightarrow C \cup \{c_0\}$.

令

$$\Phi(v) = \begin{cases} \Phi(v) & v \in V(G_1); \\ c_0 & v \in S_i (t-i \text{ 为偶数}); \\ c_1 & v \in S_i (t-i \text{ 为奇数}); \end{cases}$$

其中 $0 \leq i \leq t$. 因此 $X(G) \leq l+1 \leq m-1$, 矛盾. 故 $X(G_1) = m-1$. 显然 $g(G_1) \geq n$, 从而有 $|V(G_1)| \geq f(m-1, n)$. 注意到 $f(m, n) = |V(G)| = |S| + |V(G_1)|$, 故有

$$f(m, n) \geq 1 + \frac{(m-1)[(m-2)^t - 1]}{m-3} + f(m-1, n).$$

即 $f(m, n)$ 关于 $m (m \geq 4)$ 的类推式, 不难得到

$$f(m, n) \geq (m-3) + \sum_{k=4}^m (k-1) \frac{[(k-2)^t - 1]}{k-3} + f(3, n).$$

将 $t = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ 和由定理 1 得到的 $f(3, n) = 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ 代入上式, 定理 2 证毕.

注:综合定理 1-2, 对所有正整数 m 和 n , 我们给出了 $f(m, n)$ 的下界. 在定理 2 中对一般的 m 和 n , $f(m, n)$ 的下界难以简化, 这涉及到“幂和问题”^[6], 但当 n 较小时 ($4 \leq n \leq 9$), 容易简化 $f(m, n)$ 的下界, 由此便能得到围长不小于 n ($4 \leq n \leq 9$) 的 P 阶图色数的上界. 这里以 $n = 4$ 为例, 考虑无三角形图的色数.

定理 3 对于任意一个 P 阶无三角形图 G , 均有

$$X(G) \leq \frac{8P + 9 - 1}{2}.$$

证 设 $X(G) = m$, 只需证明 $P \geq m(m+1)/2 - 1$ 即可. 当 $1 \leq m \leq 3$ 时显然成立. 当 $m \geq 4$ 时. 由于 G 是无三角形图, 即 $g(G) \geq 4$, 由定理 2 得

$$P \geq f(m, 4) \geq m - 2 + 2\left[\frac{4}{2}\right] + \sum_{k=4}^m (k-1),$$

简化上式得 $P \geq m(m+1)/2 - 1$. 定理 3 证毕.

对于无三角形图的色数, 我们也可以得到另一上界如下.

定理 4 对于任意 P 阶无三角形图 G , 均有 $X(G) \leq (P+10)/5$.

证 设 $X(G) = m$, 只需证明 $P \geq 5m - 10$.

(对 m 用归纳法) 当 $1 \leq m \leq 3$ 时显然成立; 若定理对于色数小于或等于 m 的图成立 ($m \geq 3$), 现考虑 $X(G) = m+1$ 的 P 阶图 G , 即证 $P \geq 5(m+1) - 10$.

不妨设 G 为 $(m+1)$ -色临界图 (否则考虑 G 的 $(m+1)$ -色临界子图), 故 G 为连通图, 注意到 $X(G) = m+1 \geq 4$ 且 $g(G) \geq 4$, 知 G 不为奇圈或完全图, 由引理 3 知 $\chi(G) \geq X(G) \geq 4$. 取 v_0 是 G 中一个最大度点. 令 $S = N[v_0] = N(v_0) \cup \{v_0\}$ 为 v_0 点在 G 中的闭邻域. 再令 $G_1 = G - S$. 由于 G 是 $(m+1)$ -色临界图, 故 $X(G_1) \leq X(G) - 1 = m$. 下面证 $X(G_1) = m$. 假设 $X(G_1) = l \leq m-1$, 则存在 G_1 的一个着色映射 $\Phi: V(G_1) \rightarrow C = \{c_1, c_2, \dots, c_l\}$, 取 c_0 为一种新颜色, 注意到 G 是无三角形图, $N(v_0)$ 中任何两点是不邻的. 将 Φ 扩充成 G 的 $l+1$ -着色映射.

$$\Phi(v) = \begin{cases} \Phi(v) & v \in V(G_1); \\ c_0 & v \in N(v_0); \\ c_1 & v = v_0 \end{cases}$$

由此可见 $X(G) \leq l+1 \leq m$, 这与 $X(G) = m+1$ 矛盾. 故 $X(G_1) = m$, 由归纳假设 $|V(G_1)| \geq 5m - 10$. 又因 $|S| = |N[v_0]| = \chi(G) + 1 \geq 5$, 因此 $P = |S| + |V(G_1)| \geq 5 + 5m - 10 = 5(m+1) - 10$, 由归纳原理, 定理 4 证毕.

顺便指出, X. Shaoji^[7] 提出猜想: 对于任意 P 阶图 G , 均有 $X(G) - \omega(G) \leq P/5$. 其中 $\omega(G)$ 为 G 的团数, 即 G 的最大完备子图的阶数, 这一猜想至今未见解决. 定理 4 说明了对于无三角形图猜想是正确的. 此外, 注意到仅仅当 $P = 9, 14$ 时, 定理 4 给出的上界才优于定理 3 所给的上界. 因此, 一般地说, 反映无三角形图色数上界的最好结论为定理 3 (除 $n = 9, 14$ 外).

参 考 文 献

- 1 F·哈拉里·图论·上海:上海科技出版社,1980.145~172
- 2 B·Bollobas, Extremal Graph Theory, Academic Press, London(1978) 218~280
- 3 G·A·Dirac, The Structure of k -chromatic graphs, Fund·Math·40(1953), 42~55
- 4 P·Erdos, Graph theory and probability II, Canad·J·Math·13(1961), 346~352
- 5 L·Lovasz, On chromatic number of finite set-systems·Acta Math·Acad·sei·Hungar 19(1968), 59~67
- 6 陈景润·组合数学简介·天津:天津科学技术出版社,1988.188~237
- 7 X·shaoji, Relations between parameters of a graph, Discrete Math·89(1991) 65~88

On Chromatic Number and Girth of a Graph

Xu Baogen

Hu Limo

(Basic Courses Department)

(Middle school 29th, Nanchang)

Abstract In the paper, the authors give the lower bound of $f(m, n)$ and discusses the super bound of Chromatic numbers for triangle-free graphs, when $f(m, n)$ denote the minimum number of vertices of a graph in which its chromatic number is m and girth is no less than n .

Key words graph; chromatic number; girth; m -chromatic critical graph; triangle-free graph.

(上接第 63 页)

An Approach to the Railway Constructing Enterprises Matrix Administrative System

Li Minghua

(Civil Engineering Department)

Abstract This paper has described a cardinal principle of matrix administrative system, and established two matrix administrative models: the item management and the chief economist, engineer and accountant management. It has analysed the range of its application, main points of operation and some problems that need special attention.

Key words railway; enterprises of construction; matrix administration; model; an approach.