

Gerretsen 不等式之一的推广与加强

刘 健

(土木工程系)

摘 要 本文将有关三角形通常元素的一个 Gerretsen 不等式推广到涉及一动点的情形,同时给出了它的一个加强,并提出有关的一个猜想^[1].

关键词 三角形;不等式;点

分类号 O122.3

0 引 言

1953 年, J. C. Gerretsen^[1]建立了下述有关三角形的不等式链: 设 $\triangle ABC$ 的半周长、外接圆半径与内切圆半径分别为 s, R, r , 则

$$16Rr - 5r^2 \leq s^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2 \quad (1)$$

等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立^[1]

其后, W. J. Bludon^[2]在 1965 年率先证明了 $q(R, r) = 16Rr - 5r^2$ 与 $Q(R, r) = 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ 分别是 s^2 的最佳二次型上、下界, 这表明式(1)是一个非常强的结果^[3]事实上, 自不等式链式(1)出现后, 有大量文献在研究各类三角形不等式时引用了它, 由此可见不等式链式(1)之重要性^[3]

关于 Gerretsen 不等式链式(1)的加权推广, R. Frucht, M. S. Klamkin^[3]与 J. F. Rigby^[4]等人早已作了探讨^[3]1994 年杨学枝^[5]在研究一类三角不等式的统一证法时, 获得了较 Gerretsen 不等式链更广、更强的结论^[3]最近, 刘保乾^[6]指出式(1)的右半不等式等价于下式:

$$R^2 \geq 2Rr + \frac{1}{8}[(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2], \quad (2)$$

(a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三边) 并将其加强为

$$R^2 \geq 2Rr + \frac{1}{4}l^2 \quad (3)$$

其中 l 为 $\triangle ABC$ 任意两边之差^[3]

本文中, 我们将 Gerretsen 不等式链式(1)的左半不等式

$$s^2 \geq 16Rr - 5r^2 \quad (4)$$

推广到涉及任一点至三角形各边距离的情形, 同时给出它的一个加强^[3]

1 推广

定理 1 设 $\triangle ABC$ 平面上任一点 P 至边 BC, CA, AB 的距离分别为 r_1, r_2, r_3 , 其余符号同上, 则

$$s^2 \geq 16Rr + 4r^2 - 3(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \quad (5)$$

等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形且 P 为其中心时成立^[13]

特别地, 令 P 为 $\triangle ABC$ 的内心, 则 $r_1 = r_2 = r_3 = r$, 于是由式 (5) 立得式 (4), 故不等式 (5) 推广了 Gerretsen 不等式 (4)^[13]

证明 记 $\triangle ABC$ 的面积为 Δ , 注意到 $ar_1 + br_2 + cr_3 \geq 2\Delta$, 由此应用 Cauchy 不等式易得

$$(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \geq \frac{4\Delta^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (6)$$

等号仅当 P 为 $\triangle ABC$ 的类似重心时成立^[13]

由式 (6) 可知, 欲证式 (5) 只需证

$$s^2 \geq 16Rr + 4r^2 - \frac{12\Delta^2}{a^2 + b^2 + c^2},$$

即

$$(a^2 + b^2 + c^2)(s^2 - 16Rr - 4r^2) + 12\Delta^2 \geq 0. \quad (7)$$

利用 $\Delta = rs$ 与 Heron 公式 $\Delta = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{4}$ 容易证得

$$bc + ca + ab = s^2 + 4Rr + r^2 \quad (8)$$

于是可知式 (7) 等价于

$$(a^2 + b^2 + c^2)[5s^2 - 4(bc + ca + ab)] + 12s(s-a)(s-b)(s-c) \geq 0 \quad (9)$$

令 $s-a=x, s-b=y, s-c=z$, 则 $a=y+z, b=z+x, c=x+y, s=x+y+z$ ^[13] 从而又知式 (9) 等价于

$$[(y+z)^2 + (z+x)^2 + (x+y)^2][5(x+y+z)^2 - 4(z+x)(x+y) - 4(x+y)(y+z) - 4(y+z)(z+x)] + 12(x+y+z)xyz \geq 0 \quad (10)$$

简化即

$$2[x^4 + y^4 + z^4 - (y+z)x^3 - (z+x)y^3 - (x+y)z^3 + xyz(x+y+z)] \geq 0,$$

也即 $(y+z-x)^2(y-z)^2 + (z+x-y)^2(z-x)^2 + (x+y-z)^2(x-y)^2 \geq 0$ ^[13]

可见不等式 (9) 成立, 从而不等式 (5) 获证^[13]

从上知式 (9) 中等号仅当 $a=b=c$ 时成立, 据此及式 (6) 等号成立的条件即知式 (5) 中等号成立条件如定理 1 中所述, 定理 1 证毕^[13]

定理 1 的不等式实际上是作者在研究有关三角形平面上任意一点 P 的猜想不等式^[7]:

$$(PB + PC)^2 + (PC + PA)^2 + (PA + PB)^2 \geq 24Rr \quad (10)$$

时发现的, 作为它的一个应用, 下面利用它来证明式 (10) 成立:

设 $\triangle ABC$ 的边 a 上的高为 h_a , 则易证 $h_a^2 \leq s(s-a)$, 也即有 $(b+c)^2 \geq a^2 + 4h_a^2$, 据此而知 $(PB + PC)^2 \geq a^2 + 4r_1^2, (PC + PA)^2 \geq b^2 + 4r_2^2, (PA + PB)^2 \geq c^2 + 4r_3^2$, 故欲证式 (10) 只需证

$$4(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) + a^2 + b^2 + c^2 \geq 24Rr \quad (11)$$

由式 (8) 易得 $a^2 + b^2 + c^2 = 2(s^2 - 4Rr - r^2)$, 所以易知上式等价于

$$2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \geq 16Rr + r^2 - s^2 \quad (12)$$

由不等式(5)与不等式(4)知

$$2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) - (16Rr + r^2 - s^2) \geq \frac{2}{3}(16Rr + 4r^2 - s^2) - \\ (16Rr + r^2 - s^2) = \frac{1}{3}(s^2 - 16Rr + 5r^2) \geq 0,$$

故不等式(10)、(11)获证^[3]

顺便指出,不等式(10)与 M·S·Klamkin, M·H·Hendricks 早在 1975 年建立的不等式(见文献[8]P334):

$$(PB + PC)^2 + (PC + PA)^2 + (PA + PB)^2 \geq \frac{5}{6}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}\Delta \quad (12)$$

是不分强弱的并行结果^[3]

2 加 强

从所周知, Gerretsen 不等式(4)可根据有关重心 G 与内心 I 的距离 GI (下记 $GI = d$) 的平方公式^[9]:

$$d^2 = \frac{1}{9}(s^2 - 16Rr + 5r^2) \quad (13)$$

导出,注意到了这一公式即易知,定理 1 的不等式(5)等价于以下更简洁的形式

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \geq 3(r^2 - d^2) \quad (14)$$

此式启示作者猜测成立着类似的线性不等式

$$r_1 + r_2 + r_3 \geq 3(r - d). \quad (15)$$

事实上,这个猜测是正确的(后将证明)^[13]在探求其证明时,我们意外地发现了 Gerretsen 不等式(5)的下述加强^[13]

定理 2 设 $\triangle ABC$ 任意两边之和与另一边的比为 $k(k > 1)$, 其余符号同上, 则

$$s^2 \geq 16Rr + (k^2 - 4k - 1)r^2 \quad (16)$$

等号当且仅当 $k = 3$ 或 $\triangle ABC$ 为等腰三角形时成立^[13]

显然,不等式(16)等价于

$$s^2 \geq 16Rr - 5r^2 + (k - 2)^2 r^2 \quad (17)$$

由此即见不等式(16)加强了 Gerretsen 不等式(5)^[13]

证明 于式(17)两边乘以 s , 并注意到 $abc = 4Rrs$ 与 $sr^2 = (s-a)(s-b)(s-c)$, 即知式(16)等价于

$$s^3 \geq 4abc - 5(s-a)(s-b)(s-c) + (s-a)(s-b)(s-c)(k-2)^2. \quad (18)$$

其中 k 为 $\frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c}$ 之中的任一值^[13]

现假定 $k = \frac{b+c}{a}$, 并记 $s-a = x, s-b = y, s-c = z$, 则 $s = x + y + z, a = y + z, b = z + x, c = x + y$ ^[13] 此时式(18)等价于

$$(x + a)^3 \geq 4(z + x)(x + y)a - 5xyz + xyz\left(\frac{2x - a}{a}\right)^2,$$

两边乘以 a^2 , 则知上式等价于

$$(x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3)a^2 \geq 4(x^2 + ax + yz)a^3 - 5xyz a^2 + xyz(4x^2 - 4ax + a^2),$$

整理得 $(a^2 - 4yz)x^3 + (4yza - a^3)x^2 + (4yza^2 - a^4)x + a^5 - 4yza^3 \geq 0$,

即 $(a^2 - 4yz)(x+a)(x-a)^2 \geq 0$ (13)

再以 $x=s-a, y=s-b, z=s-c$ 代入, 便知上式等价于

$$\frac{1}{4}s(b-c)^2(b+c-3a)^2 \geq 0, \quad (19)$$

由此可见 $k=\frac{b+c}{a}$ 时不等式 (18)、(16) 成立, 且从式 (19) 易知式 (16) 中等号成立的条件恰如定理 2 中所述⁽¹³⁾

当 $k=\frac{c+a}{b}$ 或 $k=\frac{a+b}{c}$ 时, 同理可证式 (16) 成立⁽¹³⁾

由定理 2 易得推论: 当 $a \leq b \leq c$ 且 $c+a \geq 3b$ 时有

$$s^2 \geq 16Rr - 4r^2 \quad (20)$$

这是 I. Passche 早在 1971 年提出的部分结论, 参见文献 [8]⁽¹³⁾

下面, 我们应用定理 2 来推证前面的不等式 (15) (13)

注意到 $\frac{h_a-3r}{r} = \frac{b+c}{a} - 2$ 等, 由不等式 (17) 知

$$s^2 \geq 16Rr - 5r^2 + (h-3r)^2 \quad (21)$$

其中 h 为高线 h_a, h_b, h_c 中的任一值, 再利用公式 (13) 得 $9d^2 \geq (h-3r)^2$, 由此知

$$3(r-d) \leq h \leq 3(r+d), \quad (22)$$

按上式的左半不等式有

$$ar_1h_a + br_2h_b + cr_3h_c \geq 3(ar_1 + br_2 + cr_3)(r-d),$$

又由于 $ah_a = bh_b = ch_c = 2\Delta, r > d, ar_1 + br_2 + cr_3 \geq 2\Delta$ 故由上式立知不等式 (15) 成立⁽¹³⁾ 顺便指出, 根据式 (22) 的右半不等式, 类似地可以得知, 对 $\triangle ABC$ 内部任一点 P 成立不等式

$$r_1 + r_2 + r_3 \leq 3(r+d) \quad (23)$$

最后, 我们提出一个猜想来结束本文⁽¹³⁾

不等式 (14) 与不等式 (15) 促使作者考虑了它们统一的指数推广, 经应用计算机考察, 提出
猜想 设 $1 < k < 2$, 其余符号同前, 则

$$r_1^k + r_2^k + r_3^k \geq 3(r^k - d^k) \quad (24)$$

参 考 文 献

- 1 J. C. Gerretsen. Ongelijkheden in de Driehoek, Nieuw Tijdschr. Wisk. 1953, 41: 1~7
- 2 W. J. Bludon. Inequalities Associated with the Triangle, Canad. Math. Bull. 1965, 8: 615~626
- 3 R. Frucht, M. S. Klamkin. On Best Quadratic Triangle Inequalities. Geometriae Dedicata 1973, 2: 341~348 19.
- 4 J. F. Rigby. Sextic Inequalities for the Sides of a Triangle, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No. 498~541 (1975), 51~58
- 5 杨学枝. 一类三角不等式的统一证法. 见: 常庚哲主编. 数学竞赛, 第 19 辑 19 长沙: 湖南教育出版社, 1994. 24

~40

- 6 刘保乾·J·C·Gerretsen 不等式的等价形式及其应用¹⁹.西藏大学学报, 1995, 10(3):74~78
- 7 单? 主编. 几何不等式在中国. 南京:江苏教育出版社, 1996. 143~165
- 8 D·S·Mitrinović, J·E·Pecarić and V·Volenec, Recent Advances in Geometric Inequalities, Kluwer Academic Publishers, 1989
- 9 O·Bottem(荷兰)等. 几何不等式. 单? 译, 北京:北京大学出版社, 1991

Extend and Strengthen One of Gerretsen Inequality

Liu Jian

(Civil Engineering Department)

Abstract This paper extends the Gerretsen triangle geometric inequality to any point in triangle and strengthens the inequalities of Gerretsen. Furthermore, it forms a hypothesis of geometric inequality.

Key words triangle; inequality; point