

广义图 $K(5, n)$ 的边色数

刘二根

(基础课部)

摘 要 本文给出了完全图 K_5 的广义图 $K(5, n)$ 的一种正常边着色法, 从而解决了这类图的边色数^[13]

关键词 正常边着色; 边色数; 匹配; 广义图 $K(5, n)$

分类号 O157.5

0 引 言

本文所讨论的图均为无向简单图, $E(G)$ 表示图 G 的边集, 文中凡未说明的符号及术语均同于文献^{[1][13]}

定义 1 图 G 的一个正常边着色 π 是指映射 $\pi: E(G) \longrightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$, 使得 G 的任何相邻边不同象^[13]

定义 2 图 G 的一个边 K -着色是用 k 种颜色的一个正常边着色^[13]

定义 3 图 G 的边色数是指使得 G 有一个边 K -着色的最小的数目 k , 用 $X(G)$ 表示^[13]

1964 年 Vizing 证明了 $\Delta(G) \leq X(G) \leq \Delta(G) + 1$, 若 $X(G) = \Delta(G)$, 则称 G 属于第一类, 记作 $G \in \leq_1$, 否则称 G 属于第二类, 记作 $G \in \leq_2$ ^[13] 若 G 的边 K -着色 π 的 k 种颜色为 $\{1, 2, \dots, k\}$, 则 π 将 $E(G)$ 分解成色类 $E_1, E_2, \dots, E_k$ 的不相交的并且对每个 $e \in E_i$, $\pi(e) = i$, E_i 称为 G 的一个匹配^[13]

刘红美, 陈泽乾在文献^[2]中定义了图 $K(4, n)$ 并给出了它的一种正常边着色^[13] 本文先给出了 K_5 的广义图 $K(5, n)$ 的定义, 然后找到了它的一种正常边着色, 从而解决了这类图的边色数^[13]

定义 4 令 $K(5, 0) = K_5$ 且 $V(K(5, 0)) = \{u, v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, v_3^{(0)}, v_4^{(0)}\}$, 沿 $v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, v_3^{(0)}, v_4^{(0)}$ 出发作边 $v_1^{(0)}v_1^{(1)}, v_2^{(0)}v_2^{(1)}, v_3^{(0)}v_3^{(1)}, v_4^{(0)}v_4^{(1)}$, 连接 $v_1^{(1)}v_2^{(1)}, v_1^{(1)}v_3^{(1)}, v_1^{(1)}v_4^{(1)}, v_2^{(1)}v_3^{(1)}, v_2^{(1)}v_4^{(1)}, v_3^{(1)}v_4^{(1)}$ 所得到的图记为 $K(5, 1)$, 而 $K(5, n)$ 是由 $K(5, n-1)$ 通过增加新点 $v_1^{(n)}, v_2^{(n)}, v_3^{(n)}, v_4^{(n)}$ 及新边 $v_1^{(n-1)}v_1^{(n)}, v_2^{(n-1)}v_2^{(n)}, v_3^{(n-1)}v_3^{(n)}, v_4^{(n-1)}v_4^{(n)}, v_1^{(n)}v_2^{(n)}, v_1^{(n)}v_3^{(n)}, v_1^{(n)}v_4^{(n)}, v_2^{(n)}v_3^{(n)}, v_2^{(n)}v_4^{(n)}, v_3^{(n)}v_4^{(n)}$ 所得^[13]

引理^[3] $K_5 \in \leq_2$ ^[13]

1 $K(5, n)$ 的边色数

定理 当 $n \geq 1$ 时, $X(K(5, n)) = 5$, 即 $K(5, n) \in <_1$, 而当 $n = 0$ 时, $K(5, n) \in <_2$ (13)

证明 由引理可知定理的后一部分成立, 下面证明定理的前一部分 (13)

当 $n \geq 1$ 时, $\Delta(K(5, n)) = 5$, 设 $E_i^{(n)}$ 表示图 $K(5, n)$ 的边着第 i 种颜色的边集, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ (13)

当 $n = 1$ 时, 令

$$\begin{aligned} E_1^{(1)} &= \{uv_1^{(0)}, v_2^{(0)}v_3^{(0)}, v_4^{(0)}v_4^{(1)}, v_1^{(1)}v_3^{(1)}\}; \\ E_2^{(1)} &= \{uv_2^{(0)}, v_1^{(0)}v_4^{(0)}, v_3^{(0)}v_3^{(1)}, v_2^{(1)}v_4^{(1)}\}; \\ E_3^{(1)} &= \{uv_3^{(0)}, v_2^{(0)}v_4^{(0)}, v_1^{(0)}v_1^{(1)}, v_2^{(1)}v_3^{(1)}\}; \\ E_4^{(1)} &= \{uv_4^{(0)}, v_1^{(0)}v_3^{(0)}, v_2^{(0)}v_2^{(1)}, v_1^{(1)}v_4^{(1)}\}; \\ E_5^{(1)} &= \{v_1^{(0)}v_2^{(0)}, v_3^{(0)}v_4^{(0)}, v_1^{(1)}v_2^{(1)}, v_3^{(1)}v_4^{(1)}\} \quad (13) \end{aligned}$$

则 $E_1^{(1)}, E_2^{(1)}, E_3^{(1)}, E_4^{(1)}, E_5^{(1)}$ 为 $K(5, 1)$ 的一个匹配, 故 $X(K(5, 1)) = 5$, 即 $K(5, 1) \in <_1$ (13)

当 $n = 2$ 时, 令

$$\begin{aligned} E_1^{(2)} &= E_1^{(1)} \cup \{v_2^{(1)}v_2^{(2)}, v_1^{(2)}v_3^{(2)}\}; \\ E_2^{(2)} &= E_2^{(1)} \cup \{v_1^{(1)}v_1^{(2)}, v_2^{(2)}v_4^{(2)}\}; \\ E_3^{(2)} &= E_3^{(1)} \cup \{v_4^{(1)}v_4^{(2)}, v_2^{(2)}v_3^{(2)}\}; \\ E_4^{(2)} &= E_4^{(1)} \cup \{v_3^{(1)}v_3^{(2)}, v_1^{(2)}v_4^{(2)}\}; \\ E_5^{(2)} &= E_5^{(1)} \cup \{v_1^{(2)}v_2^{(2)}, v_3^{(2)}v_4^{(2)}\} \quad (13) \end{aligned}$$

则 $E_1^{(2)}, E_2^{(2)}, E_3^{(2)}, E_4^{(2)}, E_5^{(2)}$ 为 $K(5, 2)$ 的一个匹配, 故 $X(K(5, 2)) = 5$, 即 $K(5, 2) \in <_1$ (13)

当 $n = 2m$ 时, 令

$$\begin{aligned} E_1^{(2m)} &= E_1^{(2m-1)} \cup \{v_2^{(2m-1)}v_2^{(2m)}, v_1^{(2m)}v_3^{(2m)}\}; \\ E_2^{(2m)} &= E_2^{(2m-1)} \cup \{v_1^{(2m-1)}v_1^{(2m)}, v_2^{(2m)}v_4^{(2m)}\}; \\ E_3^{(2m)} &= E_3^{(2m-1)} \cup \{v_4^{(2m-1)}v_4^{(2m)}, v_2^{(2m)}v_3^{(2m)}\}; \\ E_4^{(2m)} &= E_4^{(2m-1)} \cup \{v_3^{(2m-1)}v_3^{(2m)}, v_1^{(2m)}v_4^{(2m)}\}; \\ E_5^{(2m)} &= E_5^{(2m-1)} \cup \{v_1^{(2m)}v_2^{(2m)}, v_3^{(2m)}v_4^{(2m)}\} \quad (13) \end{aligned}$$

当 $n = 2m + 1$ 时, 令

$$\begin{aligned} E_1^{(2m+1)} &= E_1^{(2m)} \cup \{v_4^{(2m)}v_4^{(2m+1)}, v_1^{(2m+1)}v_3^{(2m+1)}\}; \\ E_2^{(2m+1)} &= E_2^{(2m)} \cup \{v_3^{(2m)}v_3^{(2m+1)}, v_2^{(2m+1)}v_4^{(2m+1)}\}; \\ E_3^{(2m+1)} &= E_3^{(2m)} \cup \{v_1^{(2m)}v_1^{(2m+1)}, v_2^{(2m+1)}v_3^{(2m+1)}\}; \\ E_4^{(2m+1)} &= E_4^{(2m)} \cup \{v_2^{(2m)}v_2^{(2m+1)}, v_1^{(2m+1)}v_4^{(2m+1)}\}; \\ E_5^{(2m+1)} &= E_5^{(2m)} \cup \{v_1^{(2m+1)}v_2^{(2m+1)}, v_3^{(2m+1)}v_4^{(2m+1)}\} \quad (13) \end{aligned}$$

由数学归纳法很容易证明当 $n \geq 1$ 时, $E_1^{(n)}, E_2^{(n)}, E_3^{(n)}, E_4^{(n)}, E_5^{(n)}$ 为 $K(5, n)$ 的一个匹配, 故 $X(K(5, n)) = 5$, 即 $K(5, n) \in <_1$ (13)

参 考 文 献

- 1 F·Harary·Graph Theory·Addison Wesley, Reading, MA, 1969
- 2 刘红美,陈泽乾·广义图 $K(4, n)$ 边着色分类·数学杂志,1996,16(4):531~533
- 3 叶宏博·图论中的若干专题·北京:中国科学技术出版社,1992

Edge-Chromatic Number of Graph $K(5, n)$

Liu Ergen

(Basic Courses Department)

Abstract In this paper, we present a proper colouring method for $K(5, n)$ and solve the edge-chromatic number of $K(5, n)$.

Key words proper edge colouring; edge-chromatic number; matching; graph $K(5, n)$