

关于对子棋

周尚超

(基础部课)

摘 要 本文用向量解决了对子棋问题^[1].

关键词 向量;棋;对子棋

分类号 O 151. 24

将15枚棋子等距离地排成一行,两人轮流按规则取走棋子,每次2枚^[1]当甲方取走2枚棋子后,乙方再也找不到可取棋子,乙方就输了^[1]取棋的规则是:只可取紧挨着的两枚^[1]这是[1]中介绍的一类棋,称为对子棋^[1]

事实上,这种棋下熟了,可得结论:谁先取子谁就输^[1]我们将棋子个数推广到任意 n 枚,将这些棋子记为第1,第2, ..., 第 n 个^[1]取棋的规则是:如取了第 i 个,则另一个被取的应是第 $i-1$ 或 $i+1$ 个^[1]下棋前的状况用1维向量 (n) 表示^[1]如果第一次取走了第 i 和第 $i+1$ 个棋子,则棋子被分成两部分,各有 $i-1$ 和 $n-i-1$ 个棋子,这时的状况用无序向量 $(i-1, n-i-1)$ 表示^[1]如果 $i-1=0$ 或 1 , 就用 $(n-i-1)$ 表示,因为1个孤立的棋子是不可取的,就象没有一样^[1] $i=1, 2, \dots, n-1$, 因此第一次取子共有 $n-1$ 种取法^[1]根据对称性,如第一次取走第 $n-i$ 和第 $n-i+1$ 枚后的状况仍为 $(i-1, n-i-1)$, 因此可认为第一次取子只有 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ($\frac{n}{2}$ 的整数部分) 种取法^[1]在取子若干次后的状况用无序向量 $N=(n_1, n_2, \dots, n_k)$ 表示,其中 $n_i \geq 2$, 称 N 为棋的局势向量,简称棋局^[1]在棋局 N 之后取了一次棋后的棋局 N' 称为 N 的子向量,记为 $N > N'$ ^[1]是将 N 的某个分量 n_i 变为两个分量 a, b 得到的, $a+b=n_i-2$ ^[1]如 a, b 中有一个 ≤ 1 , 则删去此分量^[1]共有 $\lfloor \frac{n_1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n_2}{2} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{n_k}{2} \rfloor$ 个子向量,或在 N 之后共有这么多种取子法^[1]当棋子被取尽或只有一些孤立的棋子时,用向量 (0) 表示^[1]

将 $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ 称为 $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ 的阶^[1]阶 ≤ 6 的向量有 $(0), (2), (3), (4), (5), (6), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (2, 2, 2)$ ^[1]如你走棋之后的棋局是 $(2), (3), (4)$, 你输了^[1]如你走棋之后的棋局是 $(0), (5), (2, 2), (2, 3), (3, 3)$, 你胜了^[1]如你走棋之后的棋局是 $(6), (2, 4), (2, 2, 2)$, 对方可走棋使棋局为 $(2, 2)$ 而胜^[1]这样我们可将 $(0), (5), (2, 2), (2, 3), (3, 3)$ 定义为胜向量,其余定义为负向量^[1]胜负是按你走棋之后的棋局对你是否有利来定义的^[1]如果按走棋前的棋局对你是否有利来定义,则胜(负)变为负(胜)^[1]

胜负向量的定义^[1]如果对阶 $\leq n$ 的所有向量的胜负性已定义^[1]是阶为 $n+1$ 的向量^[1]如

果 N 的所有子向量都是负向量, 则称 N 为胜向量⁽¹³⁾。如果 N 有一个子向量是胜向量, 则称 N 为负向量⁽¹³⁾。

根据定义, 算出阶 $n \leq 13$ 的所有向量的胜负性⁽¹³⁾。用“+”代表胜, 无“+”为负⁽¹³⁾。由于负向量比胜向量多, $n \geq 10$ 时只列出胜向量⁽¹³⁾。

$n=7$: $(7), (2, 5), (3, 4), (2, 2, 3)$

$n=8$: $(8), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (2, 2, 4), (2, 3, 3), (2, 2, 2, 2) +$

$n=9$: $(9) +, (2, 7) +, (3, 6), (4, 5), (2, 2, 5) +, (2, 3, 4), (3, 3, 3), (2, 2, 2, 3) +$

$n=10$: $(2, 8) +, (3, 7) +, (5, 5) +, (2, 3, 5) +$

$n=11$: $(3, 8) +, (3, 3, 5) +, (2, 3, 3, 3) +$

$n=12$: $(6, 6) +, (2, 4, 6) +, (2, 2, 4, 4) +, (3, 3, 3, 3) +, (2, 2, 2, 2, 2) +$

$n=13$: $(2, 2, 9) +, (3, 4, 6) +, (4, 4, 5) +, (2, 2, 2, 7) +, (2, 3, 4, 4) +, (2, 2, 2, 2, 5) +, (2, 2, 2, 2, 3) +$

在你走棋前, 面临的棋局是胜向量 N 时, 无论怎样走棋, 得到的 N' 是负向量, 对方至少有一种走棋法, 使 N' 为胜向量, 最终你负(当然要对方每步都走对)⁽¹³⁾。这样, 如果下棋双方都知道这其中的原理, 则胜负是由一开始有几枚棋子以及谁先走确定⁽¹³⁾。如果 (n) 是胜(负)向量, 是先走者负(胜)⁽¹³⁾。 (15) 的子向量 $(13), (12), (2, 11), (3, 10), (4, 9), (5, 8), (6, 7)$ 都是负向量, 因此 (15) 是胜向量, 这就是本文开头所说的先取子者输⁽¹³⁾。

显然我们要解决的问题是, 对于任意向量 N , 判断其胜负性⁽¹³⁾。根据定义, 计算量是非常大的⁽¹³⁾。设 $N_1 = (n_1, n_2, \dots, n_k), N_2 = (p_1, p_2, \dots, p_t)$ ⁽¹³⁾。定义 $N = N_1 + N_2 = (n_1, n_2, \dots, n_k, p_1, p_2, \dots, p_t)$ 。称 N 是 N_1 和 N_2 的和, N_i 称为 N 的部分向量⁽¹³⁾。当 $N_1 + N_2$ 的阶 ≤ 13 时, 如 N_1, N_2 是胜向量, 则 $N_1 + N_2$ 是胜向量, 如 N_1 胜 N_2 负, 则 $N_1 + N_2$ 负⁽¹³⁾。这可简记为 **胜+胜=胜, 胜+负=负**⁽¹³⁾。

定理1 设 $N = N_1 + N_2, N_1$ 是胜向量, 则 N 是胜向量的充分必要条件是 N_2 是胜向量⁽¹³⁾。

证明 设 N_2 是胜向量⁽¹³⁾。设当 N 的阶 $\leq n$ 时定理成立⁽¹³⁾。设 N 的阶为 $n+1, N'$ 是 N 的任意子向量, $N' = N_1 + N_2$ 或 $N' = N_1 + N_2'$ ⁽¹³⁾。 N_1 或 N_2 是负向量, 由归纳法, N' 是负向量, N 是胜向量⁽¹³⁾。同理可证, 当 N_2 负时 N 负⁽¹³⁾。

定理2 设 $N = (n, n)$, 则 N 为胜向量⁽¹³⁾。

证明 设 $n \leq k$ 时成立⁽¹³⁾。设 $n = k+1$ ⁽¹³⁾。 N 的子向量只有 $(n, n-2), (n, n-3), (n, a, b)$ 三种⁽¹³⁾。 $(n, n-2)$ 的子向量 $(n-2, n-2)$ 胜 $\Rightarrow (n, n-2)$ 负, 同理 $(n, n-3)$ 负, (n, a, b) 的子向量 $(a, b, a, b) = (a, a) + (b, b)$ 胜 $\Rightarrow (n, a, b)$ 负, 即任意 N' 负, N 为胜⁽¹³⁾。

系1 设 $N = (n_1, n_1, n_2, n_2, \dots, n_k, n_k)$, 则 N 是胜向量⁽¹³⁾。

系2 设 $N = N_1 + N_2, N_1$ 是胜向量, 则 N 与 N_2 的胜负性相同⁽¹³⁾。

系3 设 $N = (2n)$, 则 N 是负向量。

证明 $N > N' = (n-1, n-1)$ 是胜向量⁽¹³⁾。

系4 $N + N$ 是胜向量。

例 设 $N = (2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 9), N_1 = (2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 9), N_2 = (3)$, 由系2, N 的胜负性与 N_2 同, N 是负向量, N_1 是 N 的一个胜子向量⁽¹³⁾。

基本向量的定义 设 N 的任意两个分量都不相等, 且 N 的任何一个部分向量都不是胜向量, 则称 N 是基本向量⁽¹³⁾。

当 $n \leq 13$ 时, 基本胜向量只有 $(5), (9), (2, 3), (2, 7), (2, 8), (3, 7), (2, 4, 6), (3, 4, 6)$ (13)

我们要解决的问题简化为求所有基本胜向量 (13)

相似的定义, 设 $N_1 + N_2$ 是胜向量, 则称 N_1 与 N_2 相似, 记为 $N_1 \cong N_2$ (13) 且 $N_2 = (n)$, 简称 N_1 与 n 相似 (13)

显然, 如 $N_1 \cong N_2$, 则 N_1 与 N_2 的胜负性相同 (13) 任意两个胜向量相似, 相似关系是等价关系 (13) 如 $N_1 \cong N_2$, 则 $N + N_1$ 与 $N + N_2$ 的胜负性相同 (13)

例 $(2, 7) + (2, 8) = (2, 2, 7, 8)$ 胜 $\Rightarrow (7, 8)$ 胜, 或 $2 \cong 7, 2 \cong 8 \Rightarrow 7 \cong 8$ (13)

最小元素的定义, 设对任意 n , 如 n_0 与 n 相似, 可推出 $n_0 \leq n$, 则称 n_0 是最小元素 (13) 称为 n 的相似值, 记为 $f(n) = n_0$ (13)

当 $n \leq 1000$ 时, 最小元素只有 $0, 2, 4, 6, 14, 16, 33, 69, 86$ 等 9 个 (13) 如果 $f(n) = 0$, 则 (n) 是胜向量 (13) 用 $\text{set}(n_0)$ 表示集合 $\{n \mid f(n) = n_0\}$ (13) 当 $n \leq 100$ 时, 这些集合如下 (13)

$\text{set}(0) = \{0, 5, 9, 15, 21, 25, 29, 35, 39, 43, 55, 59, 63, 73, 77, 89, 93, 97\}$

$\text{set}(2) = \{2, 3, 7, 8, 22, 23, 27, 28, 36, 37, 41, 42, 56, 57, 61, 62, 70, 71, 75, 76, 90, 91, 95, 96\}$

$\text{set}(4) = \{4, 12, 13, 17, 18, 26, 32, 38, 46, 47, 52, 60, 72, 80, 81, 94\}$

$\text{set}(6) = \{6, 10, 11, 19, 20, 24, 40, 44, 45, 53, 54, 58, 66, 74, 78, 79, 87, 88, 92, 100\}$

$\text{set}(14) = \{14, 30, 48, 49, 64, 68, 82, 83, 98\}$

$\text{set}(16) = \{16, 31, 50, 51, 65, 84, 85, 99\}$

$\text{set}(33) = \{33, 67\}$

$\text{set}(69) = \{69\}$

$\text{set}(86) = \{86\}$

由最小元素构成的胜向量有 $(2, 4, 6), (2, 14, 16), (4, 16, 33), (6, 14, 33)$ 和 $(2, 69, 86)$, 其余胜向量可由它们推出 (13) 例如由 $2 \cong (4, 6), 2 \cong (14, 16) \Rightarrow (4, 6) \cong (14, 16) \Rightarrow (4, 6, 14, 16)$ 胜 (13) 其它还有 $(2, 4, 14, 33)$ 胜, $(4, 6, 69, 86)$ 胜, $(2, 6, 16, 33)$ 胜等 (13)

例 设 $N = (22, 32, 48, 51, 65, 33, 69)$ (13) $(51) = f(65) = 16, (51, 65)$ 胜 (13) $(22) = 2, f(32) = 4, f(48) = 14, (22, 32, 48, 33) \cong (2, 4, 14, 33)$ 胜 (13) N 的胜负性与 (69) 相同 (13) 是负向量 (13) 要找 N 的一个胜子向量, 只要找 (69) 的一个胜子向量 $(a, b), a + b = 67$ (13) 我们在集合 $\text{set}(n_0)$ 中寻找是否有 a 和 b (13) 在 $\text{set}(16)$ 中有 $16 + 51 = 67$, 由此得 N 的一个胜子向量 $N' = (22, 32, 48, 51, 65, 33, 16, 51)$ (13)

这样, 我们的问题简化为求相似值 $f(n)$ 以及由最小元素组成的基本胜向量 (13) 计算的过程由下面的例子说明 (13)

例 求 $f(101)$ (13) 先计算 (101) 是否胜向量 (13) (101) 的子向量是 $(99), (98)$ 和 $(a, b), a + b = 99$ (13) 我们在前面列出的 $\text{set}(n_0)$ 这 9 个集合中寻找是否在哪个集合中有两数之和为 99 (13) 在 $\text{set}(2)$ 中有 3 和 96, 因此 $(101) > (3, 96)$ 是胜向量, (101) 是负向量, $f(101) \neq 0$ (13) 第二步计算 $(2, 101)$ 的胜负性, 在 $\text{set}(4)$ 中有 46, $\text{set}(6)$ 中有 53, 即 $(2, 101)$ 有子向量 $(2, 46, 53) \cong (2, 4, 6)$ 是胜向量, $(2, 101)$ 负, $f(101) \neq 2$ (13) 第三步, 由 $f(75) = 2, f(24) = 6, (4, 101) > (4, 75, 24) \cong (4, 2, 6)$ 胜, $f(101) \neq 4$ (13) 相似方法得 $(14, 101) > (14, 98) \cong (14, 14)$ 胜 (13) $(101) \neq 14$ (13) $(16, 101) > (16, 16) \cong (16, 99)$ 胜, $f(101) \neq 16$ (13) $(33, 101)$ 的所有子向量都是负向量, $f(101) = 33$ (13)

在计算 $f(n)$ 时,如果 n 与所有已知的最小元素不相似,则 n 就是一个最小元素⁽¹³⁾我们用计算机求出当 $n \leq 1000$ 时的 $f(n)$ 的值如下⁽¹³⁾

当 $n = a + 34k, k \geq 1, a \in \{2, 3, 7, 8, 22, 23, 27, 28\}, f(n) = 2;$

当 $n = a + 34k, k \geq 1, a \in \{53, 54, 58, 66, 74, 78, 79\}, f(n) = 6;$

当 $n = a + 34k, k \geq 1, a \in \{30, 34, 48, 49\}, f(n) = 14;$

当 $n = a + 34k, k \geq 1, a \in \{31, 50, 51\}, f(n) = 16;$

当 $n = 33 + 34k, k \geq 1, f(n) = 33;$

当 $n = 69 + 34k, k \geq 1, f(n) = 69;$

当 $n = 86 + 34k, k \geq 1, f(n) = 86;$

当 n 为下列值时, $f(n) = 0$ ⁽¹³⁾

5, 9, 15, 21, 25, 29, 35, 39, 43, 55, 59, 63, 73, 77, 89, 93, 97, 107, 111, 123, 127, 131, 141, 145, 157, 161, 165, 175, 179, 191, 195, 199, 209, 213, 225, 229, 233, 243, 247, 259, 263, 267, 277, 281, 293, 297, 301, 311, 315, 327, 331, 335, 345, 349, 361, 365, 369, 379, 383, 395, 399, 403, 413, 417, 429, 433, 437, 447, 451, 463, 467, 471, 481, 485, 497, 501, 505, 515, 519, 531, 535, 539, 549, 553, 565, 569, 573, 583, 587, 599, 603, 607, 617, 621, 633, 637, 641, 651, 655, 667, 671, 675, 685, 689, 701, 705, 709, 719, 723, 735, 739, 743, 753, 757, 769, 773, 777, 787, 791, 803, 807, 811, 821, 825, 837, 841, 845, 855, 859, 871, 875, 879, 889, 893, 905, 909, 913, 923, 927, 939, 943, 947, 957, 961, 973, 977, 981, 991, 995⁽¹³⁾

参 考 文 献

- 1 马天翔,朱建国,朱振南等⁽¹³⁾棋弈游戏大全⁽¹³⁾北京:中国青年出版社,1989,101~102

On Duizi Chess

Zhou shangchao

(Basic courses Department)

Abstract The aim of this article is to solve Duizi chess problem with vector.

Key words Vector; Chess; Duizi chess