

点对称强正则图

谢文华

周尚超

(成人教育部)

(基础课部)

摘要 给出了一类是强正则图的点对称图,改进了文[1]的一个定理⁽¹³⁾.

关键词 点对称图;强正则图;自补图

分类号 O 157.5

设 G 是简单图, VG 和 EG 分别是 G 的顶点和边集⁽¹³⁾. $\overline{G}$ 是 G 的补图⁽¹³⁾. 如果 G 任意两点的度都相等, 则称 G 是正则图⁽¹³⁾. 设 $u, v \in VG$, $d(u, v)$ 是 G 的与 u 和 v 都邻接的顶点数⁽¹³⁾.

定义 1 设 G 是正则图, 若对任意 $uv \in EG$, $d(u, v)$ 是一个常数, 且对任意 $u, v \in EG$, $d(u, v)$ 也是常数, 则称 G 是强正则图⁽¹³⁾.

设 f 是 VG 上的一个置换, 将 f 表示为不交的轮换分解 $f = f_1 f_2 \cdots f_n$, 令 $|f_i|$ 是 f_i 的长度, 则称 f 是 $|f_1|, |f_2|, \dots, |f_n|$ 型⁽¹³⁾.

设 $u, v \in VG$, 若有 G 的自同构 f , 使得 $f(u) = v$, 则称 u 与 v 相似, 若 G 的任意两点相似, 则称 G 是点对称图, 显然点对称图是正则图⁽¹³⁾.

定理 1 设 G 是点对称图, 若 G 有一个自同构是 $(1, m, n)$ 型, 则 G 是强正则图⁽¹³⁾.

证明 设 $f = (u_0)(u_1, u_2, \dots, u_m)(v_1, v_2, \dots, v_n)$ 是 G 的自同构⁽¹³⁾. 如 u_0 与某 u_i 邻接, 则 u_0 与 m 个 u 都邻接, 对 v 也如此⁽¹³⁾. 因此 G 的每个点的度 — 正则度为 $0, m, n$ 或 $m+n$ ⁽¹³⁾. 若为 $m+n$ 或 0 , 则 G 是 $m+n+1$ 阶完全图或完全图的补图⁽¹³⁾. 结论是显然的⁽¹³⁾. 设为 m 度的正则图, 即与 u_0 邻接的点集是 $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, 与 u_0 不邻接的点集是 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ⁽¹³⁾.

设 $uv, \overline{uv} \in EG$ ⁽¹³⁾. h 是 G 的自同构且 $h(u_0) = u, h(u_i) = v$, 由群论知 $S = hf h^{-1}$ 是 G 的自同构且

$$s = (u)(h(u_1), h(u_2), \dots, h(u_m))(h(v_1), h(v_2), \dots, h(v_n))$$

G 是点对称图, 存在 G 的自同构 k , 使 $k(u) = \overline{u}$ ⁽¹³⁾. ksk^{-1} 是 G 的自同构且

$$t = (u)(kh(u_1), kh(u_2), \dots, kh(u_m))(kh(v_1), kh(v_2), \dots, kh(v_n))$$

$\overline{u}$ 与 $h(u_j)$ 邻接, $k(u) = \overline{u}$ 与 $kh(u_j)$ 邻接, 与 $\overline{u}$ 邻接的点集是 $kh(u_i), i = 1, 2, \dots, m$ ⁽¹³⁾. 设 $\overline{v} = kh(u_i)$, 则自同构 $t^{L-j}k$ 将 u 和 $v = h(u_j)$ 分别映射为 $\overline{u}$ 和 $kh(u_i) = \overline{v}$, 同时也把与 u 与 v 都邻接的 $d(u, v)$ 个点映射为与 $\overline{u}$ 和 $\overline{v}$ 都邻接的点, $d(u, v) = d(\overline{u}, \overline{v})$ ⁽¹³⁾. 同理可证当 $uv, \overline{uv}$ 不是 G 的边时, $d(u, v) = d(\overline{u}, \overline{v})$, G 是强正则图⁽¹³⁾.

设 uv 和 $\overline{uv} \in EG$, 若有 G 的自同构 h , 使 $h(u) = \overline{u}, h(v) = \overline{v}$, 则称 uv 与 $\overline{uv}$ 相似, 若 G 的

任意两边相似, 则称 G 是线对称图^[13]

系 1 设 G 是点对称图, 若 G 有一个自同构是 $(1, m, n)$ 型, 则 G 是线对称图^[13]

若 G 与其补图 $\overline{G}$ 同构, 则称 G 是自补图^[13]

设 $p = 4m + 1$ 是素数, g 是 p 的一个原根, $VG = \{0, 1, 2, \dots, 4m\}$, $D = \{1, g^2, g^4, \dots, g^{4m-2}\}$ 是 p 的所有平方剩余的集合^[13], $E = \{ij \mid i - j \in D\}$, 运算按模 p 进行^[13]. 此图记为 $G(p)$ ^[13]

文^[1]证明了:

定理 2 设 2 是 p 的原根, 则 $G(p)$ 是强正则自补图^[13]

我们利用定理 1, 证明了可将 2 是原根这一条件删去, 得:

定理 3 $G(p)$ 是强正则自补图^[13]

证明 映射 $h: i \rightarrow i + 1, h = (0, 1, 2, \dots, 4m)$ 是 $G(p)$ 的自同构, 因此 $G(p)$ 是点对称图^[13]. 映射 $f: i \rightarrow ig, f = (0)(1, g, g^2, \dots, g^{4m-1})$ 是 $G(p) \rightarrow \overline{G(p)}$ 同构, $G(p)$ 是自补图, f^2 是 $G(p) \rightarrow G(p)$ 同构, $f^2 = (0)(1, g^2, g^4, \dots, g^{4m-2})(g, g^3, \dots, g^{4m-1})$ 是 $(1, 2m, 2m)$ 型, $G(p)$ 是强正则图^[13]

参 考 文 献

- 1 刘象武 $19_k + 1$ 阶强正则自补图的存在唯一性 *应用数学* 1996, 9(4): 500~502

Point Symmetric and Strongly Regular Graphs

Xie Wenhua

(Adult Education Department)

Zho Shangchao

(Basic Courses Department)

Abstract Let G be a point symmetric graph, f is the automorphism of G . $f = f_1 f_2 f_3$ and $(f_1, f_2, f_3) = (1, m, n)$, then G is a strongly regular graph.

Key words point-symmetric graph; strongly regular graph; self complementary graph