

图的符号控制数*

于崇智 徐保根

(基础课部)

摘 要 图 $G=(V, E)$ 的顶点集 V 上定义一个二值函数 $f: V \rightarrow \{-1, 1\}$, 若在任何一个顶点 v 的闭邻域 $N[v]$ 上函数值的和至少是 1, 即 $\forall v \in V, f(N[v]) \geq 1$, 则称 f 是 G 的一个符号控制函数. 符号控制函数的权重定义为 $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$. 图 G 的符号控制数等于 G 的一个符号控制函数的最小权重, 记为 $\chi(G)$. 本文建立了几类图的符号控制数的精确值, 并讨论了 $\chi(G)$ 的界.

关键词 图; 图的符号控制函数; 符号控制数

分类号 O157.5

设图 $G=(V, E)$, $v \in V$, v 的开邻域是与 v 相邻接的顶点集合, 即 $N(v) = \{u \mid uv \in E\}$. 称 $N(v) \cup \{v\}$ 为 v 的闭邻域, 记为 $N[v]$. 对一顶点子集 $S \subseteq V$, S 的开邻域是 $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$. 同样 $N(S) \cup S$ 称为 S 的闭邻域, 记为 $N[S]$. 若 G 中一个顶点集 $D \subseteq V$, 使 $N[D] = V$, 则称 D 是 G 的一个控制集.

在 G 的顶点集 V 上定义一个二值函数 $f: V \rightarrow \{-1, 1\}$, 若在任何一个顶点 v 的闭邻域 $N[v]$ 上函数值的和至少是 1, 即 $\forall v \in V, f(N[v]) \geq 1$, 则称函数 f 是 G 的一个符号控制函数 (signed dominating function). 一个符号控制函数的权重是 $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$. 图 G 的符号控制数定义为 G 的符号控制函数的最小权重, 即 $\chi(G) = \min \{f(V) \mid f \text{ 是 } G \text{ 的符号控制函数}\}$.

用 $\lfloor x \rfloor$ 表示不小于 x 的最小整数, $\lceil x \rceil$ 表示不大于 x 的最大整数. 本文中未定义的术语和符号均见文献 [3].

定理 1 对完全图 K_n , $\chi(K_n) = \begin{cases} 1, & \text{当 } n \text{ 为奇数,} \\ 2, & \text{当 } n \text{ 为偶数.} \end{cases}$

证明 设 f 是 K_n 的任何一个最小符号控制函数, 即使得 $f(V) = \chi(K_n)$. 记 P 和 M 分别是在函数 f 下分配值为 1 和 -1 的顶点集合. 显然 $|P| + |M| = n$. 由定义, $\forall v \in V, f(N[v]) \geq 1$, 故 $f(V) = f(N[v]) = |P| - |M| \geq 1$. 从而有

$$|P| \geq 1 + |M| = 1 + n - |P|,$$

于是得 $|P| \geq \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$, $|M| = n - |P| \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$. (13)

因此, $\chi(K_n) = f(V) = |P| - |M| \geq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ (13) 由符号控制数定义, 对 K_n 的任何一个符号控制函数 g , $\chi(K_n) \leq g(V)$ (13) 将 K_n 中 $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ 个顶点分配值 1, 余下 $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ 个顶点赋值 -1, 显然这个函数是 K_n 的一个符号控制函数, 故

$$\chi(K_n) \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \quad (13)$$

两不等式联立, 得

$$\chi(K_n) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \quad (13)$$

$$\text{当 } n = 2k + 1 \text{ 时} \quad \chi(K_n) = \chi(K_{2k+1}) = \left\lfloor \frac{2k+2}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor = 1 \quad (13)$$

$$\text{当 } n = 2k \text{ 时} \quad \chi(K_n) = \chi(K_{2k}) = \left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2k-1}{2} \right\rfloor = 2 \quad (13)$$

定理2 若 v 为图 G 的一个悬挂点, 与 v 相邻接的点设为 u , 则在 G 的任何一个符号控制函数上, v 和 u 上分配的值必等于 1 (13)

证明 设 f 是 G 的任何一个符号控制函数, 如果 $f(v) = -1$ 或者 $f(u) = -1$, 则

$$f(v) + f(u) < 1,$$

这与 f 是 G 的符号控制函数矛盾 (13)

定理3 星图 $K_{1,m}$ 的符号控制数 $\chi(K_{1,m}) = m + 1$ (13)

证明 由定理2, 星图中的任何一点都是悬挂点或是与悬挂点邻接的点, 故每个顶点必分配值 1 (13)

对二分图 $K_{m,n} (n \geq m \geq 2)$, 有下列二个定理:

定理4 当 $m = 2, 3$ 时,

$$\chi(K_{m,n}) = \begin{cases} m, & \text{当 } n \text{ 为偶数,} \\ m + 1, & \text{当 } n \text{ 为奇数} \end{cases} \quad (13)$$

证明 $K_{m,n}$ 的顶点集中两个分割集, 设为 X 和 Y , $|X| = m$, $|Y| = n$, 在 $K_{m,n}$ 中所有最小符号控制函数中, 设 f 是将值 -1 分配给 Y 的顶点尽可能多的一个函数 (13) 在函数 f 下, X^+ 、 X^- 分别表示 X 中被分配值 1 和 -1 的顶点集合 (13) 同样可类似定义 Y^+ 和 Y^- . 显然

$$\chi(K_{m,n}) = f(V) = |X^+| - |X^-| + |Y^+| - |Y^-| \quad (13)$$

先证 $X^- = \emptyset$ (13) 用反证法, 若 $X^- \neq \emptyset$, 则存在 $u \in X$, 使 $f(u) = -1$ (13) 因 $m = 2, 3$, 为使 f 是最小符号控制函数, 必有 $Y^- = \emptyset$ (13) 事实上, 若存在 $v \in Y^-$, 即 $f(v) = -1$, 则

$$\begin{aligned} f(v) + f(u) &= f(v) + f(X) \\ &= -1 + |X^+| - |X^-| \geq 1 \end{aligned} \quad (13)$$

故 $|X^+| - |X^-| \geq 2$ (13) 因 $X^- \neq \emptyset$, $|X^-| \geq 1$ (13) 两式相加 $|X^+| \geq 3$ (13) 这和 $|X^+| + |X^-| = m = 2, 3$ 矛盾, 所以 $Y^- = \emptyset$, $Y = Y^+$ (13)

在 $K_{m,n}$ 上另外定义一个符号控制函数 g :

$$\begin{cases} g(u) = 1, \\ g(v) = -f(v) = -1, & \forall v \in Y, \\ g(w) = f(w), & \text{其它} \end{cases} \quad (13)$$

显然 $g(V) = f(V) = \chi(K_{m,n})$, g 是 $K_{m,n}$ 的最小符号控制函数, 但在 Y 中, g 比 f 多一个赋值为 -1 的顶点 v , 与 f 假设矛盾, 所以 $X^- = \emptyset$ (13)

因 $X^- = \emptyset, X = X^+ \{13\}$ $u \in X, f(u) = 1$, 且 $f(N[u]) \geq 1$, 即

$$f(N[u]) = f(u) + f(Y) \geq 1 \{13\}$$

所以, $f(Y) = |Y^+| - |Y^-| \geq 0 \{13\}$ 又因 $|Y| = |Y^+| + |Y^-| = n$, 故

$$|Y^+| \geq \frac{n}{2}, \quad |Y^-| \leq \frac{n}{2} \{13\}$$

因 $\chi(K_{m,n}) = f(V) = |X^+| - |Y^-|$, 故有

$$\chi(K_{m,n}) \geq m + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \{13\}$$

当 n 为偶数, $\chi(K_{m,n}) \geq m$, 当 n 为奇数, $\chi(K_{m,n}) \geq m + 1 \{13\}$

在 $K_{m,n}$ 上另取一顶点赋值函数 $h: X$ 中顶点分配值 1, Y 中 $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 个顶点赋值 1, 其余 $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ 个顶点赋值 -1 $\{13\}$ 可直接验证函数 h 是 $K_{m,n}$ 的一个符号控制函数 $\{13\}$ 由定义

$$\chi(K_{m,n}) \leq h(V) = m + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \{13\}$$

将两不等式联立可得结论 $\{13\}$

定理 5 当 $n \geq m \geq 4$ 时,

$$\chi(K_{m,n}) = \begin{cases} 4, & \text{当 } m, n \text{ 均为偶数,} \\ 5, & \text{当 } m, n \text{ 中一个为奇数, 一个为偶数,} \\ 6, & \text{当 } m, n \text{ 均为奇数} \end{cases} \{13\}$$

证明 (1) 当 m, n 均为偶数, X, Y, X^+, X^-, Y^+, Y^- 均如上定理所设, 取 $K_{m,n}$ 顶点集上的一个赋值函数 f 为

$$f(x_{2i-1}) = 1, \quad f(x_{2i}) = -1, \quad (i = 1, 2, \dots, \frac{m}{2} - 1),$$

$$f(x_{m-1}) = f(x_m) = 1;$$

$$f(y_{2i-1}) = 1, \quad f(y_{2i}) = -1, \quad (i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1),$$

$$f(y_{n-1}) = f(y_n) = 1 \{13\}$$

其中 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 可直接验证 f 是 $K_{m,n}$ 的一个符号控制函数 $\{13\}$ 由定义, $\chi(K_{m,n}) \leq f(V) = |X^+| - |X^-| + |Y^+| - |Y^-| = 4 \{13\}$

设 g 是 $K_{m,n}$ 的一个最小符号控制函数, 即 $\chi(K_{m,n}) = g(V) \{13\}$ 因 $m \geq 4$, 故 $X^- \neq \emptyset \{13\}$ 存在 $x \in X^-$, 使 $g(N[x]) \geq 1$, 则 $g(N[x]) = g(x) + g(Y) = g(x) + |Y^+| - |Y^-| \geq 1$ 即 $|Y^+| - |Y^-| \geq 2 \{13\}$ 另外由于 $|Y^+| + |Y^-| = n$, 两式联立解得

$$|Y^+| \geq \frac{n}{2} + 1, \quad |Y^-| \leq \frac{n}{2} - 1 \{13\}$$

同理可证 $|X^+| \geq \frac{m}{2} + 1, \quad |X^-| \leq \frac{m}{2} - 1 \{13\}$

于是 $\chi(K_{m,n}) = g(V) = |X^+| - |X^-| + |Y^+| - |Y^-| \geq 4 \{13\}$

两不等式联立, 证毕 $\{13\}$

(2) 当 m, n 中一个为奇数, 一个为偶数 $\{13\}$ 不妨设 m 为奇数, $m = 2s + 1 \{13\}$ 在 $K_{m,n}$ 顶点上取赋值函数 f 为

$$\text{在 } X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \text{ 上, 取 } f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 1, f(x_4) = f(x_6) = \dots = f(x_{m-1}) =$$

$$1, f(x_5) = f(x_7) = \dots = f(x_m) = -1;$$

在 $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 上, 取 $f(y_1) = f(y_2) = 1, f(y_3) = f(y_5) = \dots = f(y_{n-1}) = 1, f(y_4) = f(y_6) = \dots = f(y_n) = -1$ (13)

可验证 f 是 $K_{m,n}$ 的一个符号控制函数 (13) 由定义知 $\chi(K_{m,n}) \leq f(V) = 5$ (13)

另设 h 是 $K_{m,n}$ 的一个最小符号控制函数 (13) 因 $m \geq 4, Y^- \neq \emptyset$. 设 $y \in Y^-$, 则

$$1 \leq h(N[y]) = h(y) + h(X) = h(y) + |X^+| - |X^-| = -1 + |X^+| - |X^-|,$$

得 $|X^+| - |X^-| \geq 2$. 又因 $|X^+| + |X^-| = |X| = m = 2s + 1$, 两式联立知

$$|X^+| \geq \frac{1}{2}(2s + 3), \quad |X^-| \leq \frac{1}{2}(2s - 1) \quad (13)$$

因 $|X^+|, |X^-|$ 必为整数, 故 $|X^+| \geq s + 2, |X^-| \leq s - 1$ (13)

同理可证 $|Y^+| - |Y^-| \geq 2$, 所以 $\chi(K_{m,n}) = h(V) = |X^+| - |X^-| + |Y^+| - |Y^-| \geq 5$ (13) 两不等式联立, 即得结论 (13)

(3) 当 m, n 均为奇数时, 可类似证出 (13)

定理6 对阶为 n 的任何图 G , $\chi(G) \leq n$ (13)

证明 将 G 的任一顶点分配值 1, 这个函数显然是 G 的一个符号控制函数, 由定义

$$\chi(G) \leq f(V) = \sum_{v \in V} f(v) = n$$

这个上界是可以达到的, 例如星图 $K_{1,m}$ 有 $\chi(K_{1,m}) = m + 1$ (13)

定理7 对阶为 n 的 k -正则图 G , $\chi(G) \geq \frac{n}{k+1}$ (13)

证明 设 f 是 G 的一个最小符号控制函数, 即 $\chi(G) = f(V)$ (13) 考察和式 $N = \sum \sum f(u)$, 这里外层和是对所有顶点 $v \in V$ 来取的, 内层和是对所有的 $u \in N[v]$ 来取的 (13) 对 $u \in V$, 这个和 N 把值 $f(u)$ 精确地计算了 $(d(u) + 1)$ 次, 故

$$N = \sum_{u \in V} (d(u) + 1) f(u) = (k + 1) \sum_{u \in V} f(u) = (k + 1) f(V) \quad (13)$$

另一方面

$$N = \sum_{v \in V} \sum_{u \in N[v]} f(u) = \sum_{u \in V} f(u) (N[v]) \geq \sum_{v \in V} 1 = n$$

所以有

$$\chi(G) = f(V) \geq \frac{n}{k+1} \quad (13)$$

这个下界同样可以达到 (13) 例如完全图 K_n , 取 $n = 3, \chi(K_3) = 1$, 但 $k = 2$, 而 $\frac{n}{k+1} = 1$ (13)

Dunbar 等人证明, 对整数 $n \geq 2$ 的路 P_n , $\chi(P_n) = n - 2 \left\lfloor \frac{n-2}{3} \right\rfloor$, 对圈图 C_n 有类似结论 (13)

定理8 对阶为 $n \geq 3$ 的圈图 C_n , $\chi(C_n) = n - 2 \left\lfloor \frac{n-2}{3} \right\rfloor$ (13)

证明 因 C_n 是 2-正则图, 由定理 7, $\chi(C_n) \geq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ (13) 下面按顶点数 n 为 $3k, 3k+1$ 和 $3k+2$ 三种情况分别进行讨论 (13)

(1) 当 $n = 3k$ (13)

$\chi(C_{3k}) \geq \left\lfloor \frac{3k}{3} \right\rfloor = k$ (13) 取 C_{3k} 的一个顶点赋值函数 f :

$$\begin{cases} f(v_{3i-2}) = f(v_{3i}) = 1, \\ f(v_{3i-1}) = -1, \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (13)$$

可以直接验证, $\forall v_j \in V(C_{3k}), f(N[v_j]) \geq 1 (j=1, 2, \dots, 3k)$ 故 f 是 C_{3k} 的一个符号控制函数. 由定义,

$$\chi(C_{3k}) \leq f(V) = k \quad (13)$$

将两不等式联立可得

$$\chi(C_{3k}) = k = 3k - 2 \left\lfloor \frac{3k-2}{3} \right\rfloor \quad (13)$$

(2) 当 $n=3k+1$ (13)

$\chi(C_{3k+1}) \geq \left\lfloor \frac{3k+1}{3} \right\rfloor = k+1$ (13) 取 C_{3k+1} 的一个顶点赋值函数 f :

$$\begin{cases} f(v_{3i-2}) = f(v_{3i}) = 1, \\ f(v_{3i-1}) = -1, \\ f(v_{3k+1}) = 1 \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, k),$$

可直接验证, $\forall v_j \in V(C_{3k+1}), f(N[v_j]) \geq 1 (j=1, 2, \dots, 3k+1)$ 故 f 是 C_{3k+1} 的一个符号控制函数, 由定义得

$$\chi(C_{3k+1}) \leq f(V) = k+1 \quad (13)$$

从两不等式联立知

$$\chi(C_{3k+1}) = k+1 = 3k+1 - 2 \left\lfloor \frac{3k-1}{3} \right\rfloor \quad (13)$$

(3) 当 $n=3k+2$ (13)

$\chi(C_{3k+2}) \geq \left\lfloor \frac{3k+2}{3} \right\rfloor = k+1$ (13) 但 $\chi(C_{3k+2}) = k+1$ 是不可能的, 若不然设 g 是 C_{3k+2} 的一个最小符号控制函数, $\chi(C_{3k+2}) = g(V) = k+1$ (13) 下分配值为 1 和 -1 的顶点集合分别记为 P 和 M , 显然有

$$\begin{cases} |P| + |M| = |V| = 3k+2, \\ |P| - |M| = g(V) = k+1, \end{cases} \quad (1)$$

(2)

解之得

$$|P| = \left\lceil \frac{4k+3}{2} \right\rceil$$

因 $|P|$ 必为整数, 故取值 $2k+1$ 或 $2k+2$ (13) 将 $|P|$ 的这二值代入式 (1), 求出 $|M|$ 值分别为 $k+1$ 或 k (13) 但这两组解均不满足式 (2), 所以方程组无解, $\chi(C_{3k+2}) \neq k+1$, 故 $\chi(C_{3k+2}) \geq k+2$ (13)

同样取 C_{3k+2} 的一个顶点赋值函数 f :

$$\begin{cases} f(v_{3i-2}) = f(v_{3i}) = 1, \\ f(v_{3i-1}) = -1, \\ f(v_{3k+1}) = f(v_{3k+2}) = 1 \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, k),$$

可直接验证 f 是 C_{3k+2} 的一个符号控制函数, 由定义得

$$\chi(C_{3k+2}) \leq f(V) = k+2 \quad (13)$$

联立两不等式知 $\chi(C_{3k+2}) = k+2 = 3k+2 - 2 \left\lfloor \frac{3k}{3} \right\rfloor$ (13)

参 考 文 献

- 1 谢继国, 张忠辅. 经典 Ramsey 数 $R(5, 9)$ 和 $R(5, 10)$ 的下界. 科学通报, 1996, 41(20): 1 918~1 919
- 2 F R K Chung, C M Grinstead. A survey of bounds for classical Ramsey numbers. J Graph Theory, 1983 (7): 25~37
- 3 C R J Clapham. A class of self-complementary graphs and lower bounds of some Ramsey numbers. J Graph Theory 1979(3): 287~289
- 4 B D McKay, K M Zhang. The value of Ramsey number Ramsey number $R(3, 8)$. J Graph Theory 1992 (16): 99~105

Ramsey Number $R(10, 10) \geq 798$

Zhou Shangchao Xu Pingsheng

(Basic Courses Department)

Abstract We proved that Ramsey number $R(10, 10) \geq 798$.**Key words** ramsey number; self complementary graphs; lower bounds

(上接第58页)

参 考 文 献

- 1 I Broere, J H Hattingh, M A Henning, A A McRae. Majority domination in graphs. Discrete Mathematics. 1995, 138: 125~135
- 2 J Dunbar, S Hedetniemi, M A Henning, A A McRae. Minus domination in regular graphs. Discrete Mathematics. 1996, 149: 311~312
- 3 邦迪 J A, 默蒂 U S R. 图论及其应用. 吴望名等译. 北京: 科学出版社, 1984.

Signed Domination Number in Graphs

Yu Chongzhi Xu Baogen

(Basic Courses Department)

Abstract A two-valued function f defined on the vertices of a graph $G = (V, E)$, f 映射 $\rightarrow \{-1, 1\}$, is a signed dominating function, such that for every $v \in V$, $f(N[v]) \geq 1$. The weight of a signed dominating function is $f(v) = \sum_{v \in V} f(v)$. The signed domination number of a graph G , denoted $\mathfrak{X}(G)$, equals the minimum weight of a signed dominating function of G . In this paper, we establish its value for some classes of graphs, and discuss the bounds of $\mathfrak{X}(G)$.

Key words graph; signed dominating function; signed domination number