第14卷第4期　　　　华东交通大学学报　　　　Vol. 14　No. 4
1997年12月　　Journal of East China Jiaotong University　　Dec.　1997

转盘上流水作业问题的一个近似算法及其分析

徐平生

(基础课部)

摘　要　对于带有转盘的流水作业问题T1,本文给出了一个近似算法,并侧重论证算法性能比的精确值⒀

关键词　流水作业;运输转盘;近似算法;性能比

分类号　O224

0　引　言

设在一个以顺时针运转的转盘上装有一个运输工具 M_0,转盘边有一个储料点及一台机器 M_1⒀设在储料点有 n 个工件,由 M_0 运至 M_1 加工,运转时间为 t_0,加工完后仍由 M_0 运回储料点,运转时间为 t_1,工件 j 在 M_1 上的工时为 p_j;对于每个工件 j 依次均有三个操作,分别是 j 由 M_0 从储料点运至 M_1 处(记为 O_{1j}),在 M_1 上加工(记为 O_{2j}),完工后运回至储料点(记为 O_{3j});又设 M_0 每次至多运送一个工件,M_1 在同一时间只能加工一个工件,M_1 处允许工件无限制缓冲存放⒀问题是如何合理安排工件的加工顺序和转盘的运转,使加工全长达到最小⒀我们把这一时间表问题简记为T1⒀

文献[1]中已证明问题T1是强 NP 困难的,因此我们有必要研究它的近似算法⒀我们给出了问题T1的一个近似算法,并对其性能比进行分析⒀本文侧重给出一个论证方法,通过巧妙的构造问题T1的一个实例,以得到该算法性能比的精确值⒀

1　关于下界和算法

为讨论方便,我们记:

$$T = t_0 + t_1;$$

$$A = \{j \mid p_j \geqslant T, j = 1, 2, \cdots, n\},\ B = \{j \mid p_j < T, j = 1, 2, \cdots, n\};$$

S_{ij}、C_{ij} 分别表示操作 $O_{ij}(i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, \cdots, n)$ 的开工、完工时间⒀

对于问题T1,当所有工件在机器 M_1 上加工时间都小于 T,即 $|A| = 0$ 时,是多项式时间

收稿日期:1997-05-20⒀　徐平生,男,1964年生,讲师⒀

可解的，这时问题的最优值为 $nT+\min(\sum_{j=1}^{n}p_j, T)$ ⒀为此在以下讨论中，我们假设 $|A|\geqslant 1$⒀

问题 T 1的一个下界由定理1给出⒀

定理1 对于 T 1问题的任意一个可行的时间表 S，有

$$C[S]\geqslant T+\max(\sum_{j=1}^{n}p_j, nT)\ .$$

其中 $C[S]$表示对应于 S 的加工全长⒀

证明 设 S 为 T 1的任一可行的时间表⒀因为第一道工序的工时为 t_0，n 个工件在 M_1 上加工所需时间为$\sum_{j=1}^{n}p_j$，而最后一道工序的工时为 t_1，于是，$C[S]\geqslant t_0+\sum_{j=1}^{n}p_j+t_1=T+\sum_{j=1}^{n}$⒀

又因为 $|A|\geqslant 1$，不妨设 $k\in A$，则工件 k 的三个操作所需时间为 $t_0+p_k+t_1\geqslant 2T$，而其余 $n-1$个工件所需时间至少为$(n-1)T$，于是

$$C[S]\geqslant T+\max(\sum_{j=1}^{n}p_j, nT)\ ⒀$$ [证毕]

问题 T 1的一个近似算法由下面的构造给出⒀

我们构造 T 1的一个可行的时间表 $\hat{S}$ 为：

(1) 工件序 $\tau=(A, B)\triangleq(\tau(1), \tau(2), \cdots, \tau(n))$，其中 A、B 中工件顺序任意；

(2) 转盘 M_0的运转如图1⒀

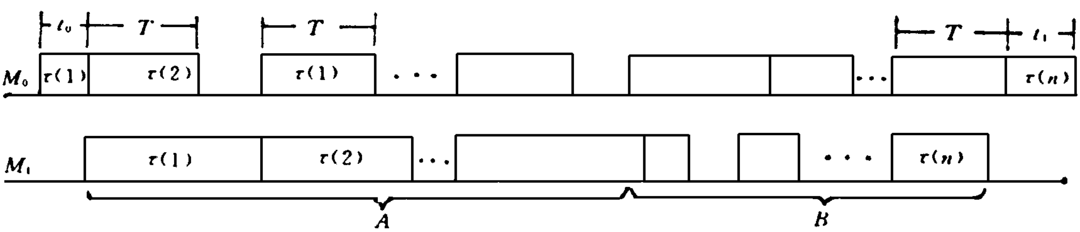

图1 $\hat{S}$ 的甘特图

对应的加工全长为$C[\hat{S}]=T+\sum_{j\in A}p_j+|B|T$⒀

我们以 $\hat{S}$ 为问题 T 1的近似解⒀

2 算法的性能比及其讨论

对于 T 1，设 S^* 为最优解，$\hat{S}$ 为近似解，则性能比定义为：

$$\rho=\sup\{r\ |\ C[\hat{S}]\leqslant rC[S^*]\}⒀$$

下面的定理2表明 $\rho=2$⒀

定理2 若以 $\hat{S}$ 为问题 T 1的近似解，则 $\rho=2$⒀

证明 首先由定理1，有

$$C[S^*]\geqslant T+\max(\sum_{j=1}^{n}p_j, nT)$$

于是

$$\frac{C[S']}{C[S^*]} \leqslant \frac{T+\sum_{j\in A}p_j+|B|T}{T+\max(\sum_{j=1}^{n}p_j, nT)} \leqslant \frac{T+\sum_{j\in A}p_j}{T+\sum_{j=1}^{n}p_j}+\frac{|B|T}{T+nT}<2$$

所以　　$\rho\leqslant 2$⒀

其次要证明其界是紧凑的⒀为此我们构造问题 T 1的一个实例 I_1,如下:

(1) m 1个 B 工件,有 $p_j=b<T/ml, j=1,2,\cdots,ml$($m, l$ 为正数, $l>1$);

(2) $m+1$个 A 工件,有 $p_{ml+1}=lT, p_j=l(T-b), j=ml+2,\cdots,(l+1)m+1$⒀工件数 $n=(l+1)m+1$⒀

现将 ml 个 B 工件等分为 m 组,分别记为 $B_1, B_2,\cdots,B_m$⒀构造实例 I_1的一个可行的时间表 S_1为: $\tau=(ml+1, B_1, ml+2, B_2,\cdots,B_m,(l+1)m+1)$;转盘 M_0不停地运转,直到最后一道工序完工(见图2)⒀

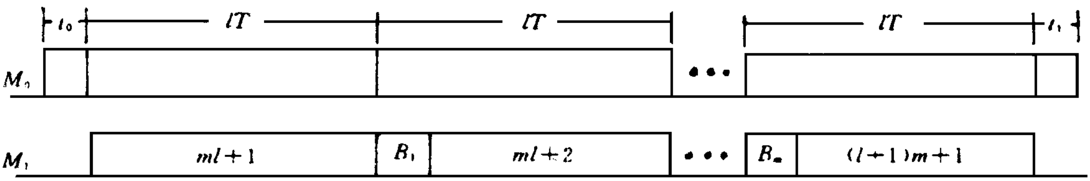

图2　S_1的甘特图

对应的加工全长为

$$C[S_1]=t_0+\sum_{j=1}^{n}p_j+t_1=T+(m+1)lT$$

由定理1知, S_1为实例 I_1的最优解⒀

对实例 I_1的近似解 S_1'有

$$C[S_1']=T+\sum_{j\in A}p_j+|B|T=[T+(m+1)lT]+(mlT-mlb),$$

$$r(I_1)\triangleq C[S_1']/C[S_1]=1+ml(T-b)/[T+(m+1)lT].$$

由 $b<T/ml$,即 $mlb<T$,可得

$$1+(ml-1)T/[T+(m+1)lT]<r(I_1)<1+mlT/[T+(m+1)lT]$$

由此易得,　$\lim_{ml\to\infty}r(I_1)=2$

所以　　$\rho=2$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[证毕]

定理2说明该近似算法的最坏情况性能比等于2;我们下面所讨论的 $\rho\leqslant 3/2$的条件,对研究由该算法得到最差解的可能性大小是有意义的⒀

定理3　当 $\sum_{j\in A}p_j\leqslant(|A|+\frac{n+1}{2})T$ 或 $|B|\leqslant\frac{n+1}{2}$时, $\rho\leqslant 3/2$⒀

证明　(1) 当 $\sum_{j\in A}p_j\leqslant(|A|+\frac{n+1}{2})T$ 时,

$$\frac{C[S']}{C[S^*]}\leqslant\frac{T+\sum_{j\in A}p_j+|B|T}{T+\max(\sum_{j=1}^{n}p_j,nT)}\leqslant\frac{T+(|A|+\frac{n+1}{2})T+|B|T}{T+nT}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}(T+nT)}{T+nT}=\frac{3}{2}.$$

(2) 当 $|B|\leqslant\frac{n+1}{2}$时,

$$\frac{C[S']}{C[S^*]}\leqslant\frac{T+\sum_{j\in A}p_j+|B|T}{T+\max(\sum_{j=1}^{n}p_j,nT)}\leqslant\frac{T+\sum_{j\in A}p_j}{T+\sum_{j=1}^{n}p_j}+\frac{|B|T}{T+nT}\leqslant\frac{3}{2}$$

综合(1)、(2)可得 $\rho\leqslant3/2$⒀

定理3表明只有当所有 B 工件的个数很多,而且所有 A 工件在 M_1 上总的工时很大时,才有可能使算法的性能比大于3/2⒀此外,根据以上分析,从直观上我们猜测一定存在 $\rho\leqslant3/2$的近似算法⒀而这种猜测将有助于问题 T 1的近似算法的进一步研究⒀

感谢华东理工大学俞文鱼此教授的指导⒀

参 考 文 献

1 徐平生,俞文鱼此.转盘上的流水作业问题.华东交通大学学报,1997,14(2):69～75

2 C H Papadimitriou 主编.组合最优化:算法和复杂性,刘振宏等译.北京:清华大学出版社,1988

An Approximation Algorithm for the Problem of Flow Shops with a Transportation Turntable and It′s Analysis

Xu Pingsheng

(Basic Courses Department)

Abstract An approximation algorithm for the problem of flow shop with a transportation turntable is presented in this paper. Much effort has been put on getting the exact value of the performance ratio of the algorithm.

Key words flow shop; transportation turntable; approximation algorithm; performance ratio