Ramsey 数 $R(10, 10) \geqslant 798$

周尚超 徐平生

(基础课部)

摘　要　本文得到了 Ramsey 数 $R(10,10) \geqslant 798$。

关键词　Ramsey 数；自补图；下界

分类号　O157

本文所指的图 G 均为无向简单图。$\overline{G}$ 表示 G 的补图。Ramsey 数 $R(s,t)$ 是一个这样的最小正整数 r，使得 r 个点的图 G 一定含有 K_s 或 $\overline{G}$ 含有 $\overline{K_t}$，这里 K_n 表示 n 阶完全图。当 $s=t$ 时，目前已知的结果是 $R(5,5) \geqslant 43$[1]，$R(6,6) \geqslant 102$，$R(7,7) \geqslant 126$[2]。自补图 G 是与其补图 $\overline{G}$ 同构的图。利用自补图可确定 $R(n,n)$ 的下界[3]。如果 p 点自补图 G 的最大完全子图是 K_n，则 $R(n+1,n+1) \geqslant p+1$。

设 $p=4m+1$ 是素数；g 是 p 的一个原根，设图 G 的顶点集 $V(G)=\{0,1,2,\cdots,4m\}$，顶点的运算按模 p 进行。$N0=\{1,g^2,g^4,\cdots,g^{4m-2}\}$ 是 p 的所有平方剩余的集合。图 G 的边集 $E(G)$ 定义为

$$E(G)=\{(i,j) \mid i-j \in N0\}。$$

如果 $(i,j) \in E(G)$，$(i-j)g \overline{\in} N0$，则 $(ig,jg) \overline{\in} E(G)$，即映射 $\sigma: x \to ig$ 把 G 的边映射为 $\overline{G}$ 的边，G 与 $\overline{G}$ 同构，G 是自补图，记为 G_p。σ 可记为 $\sigma=(0)(1,g,g^2,\cdots,g^{4m-1})$。易知 $\sigma^2=(0)(1,g^2,g^4,\cdots,g^{4m-1})(g,g^3,\cdots,g^{4m-1})$ 是 G_p 的自同构。如果 $(i,j) \in E(G)$，则 $(i+1,j+1) \in E(G)$，即 $\tau: x \to i+1$ 是 G 的自同构。$\tau=(0,1,2,\cdots,4m)$。由 τ 知 G_p 有把其一点映射为任意一点的自同构，如果 K_n 是 G_p 的最大完全子图，则 G_p 有含任意点的最大完全子图，要找 G_p 的最大完全子图，只要找含0的最大完全子图就行了。由 σ^2 知，G_p 有使0不变，把一个平方剩余(例如1)映射为任何一个平方剩余的自同构，与0邻接的点集就是 $N0$，因此 G_p 有含0和1的最大完全子图 K_n，设 $K_n=[0,1,v_3,v_4,\cdots,v_n]$。这里 $[W]$ 表示点集 W 导出的子图。设

$$N01=\{j \mid (j,0) \in E(G_p) \text{ 且 } (j,1) \in E(G_p)\},$$

即 $N01$ 是与0且与1邻接的点集。则 $\{v_3,v_4,\cdots v_n\} \subseteq N01$。要找 G_p 的最大完全子图 K_n，只要找 $[N01]$ 的最大完全子图 K_{n-2}，这就缩小了寻找范围。

我们利用计算机计算 G_p 的最大完全子图。得到 G_{797} 的最大完全子图是 K_9，且含0和1的 K_9 有170 640个，下面给出计算机算出的结果。

收稿日期：1997-01-30。　周尚超，男，1948年生，教授。

797阶自补图的最大完全子图

```
PRIME=797 K9=[0  1  10  11  25  68  155  170  195]第1个K9
PRIME=797 K9=[0  1  15  185  194  595  616  657  788]第15 001 个K9
PRIME=797 K9=[0  1  25  94  151  155  401  595  704]第30 001 个K9
PRIME=797 K9=[0  1  44  110  159  170  691  708  757]第45 001 个K9
PRIME=797 K9=[0  1  62  68  232  249  621  632  657]第60 001 个K9
PRIME=797 K9=[0  1  69  426  486  559  603  702  703]第75 001 个K9
PRIME=797 K9=[0  1  96  160  227  293  729  730  740]第90 001 个K9
PRIME=797 K9=[0  1  111  160  177  533  549  601  736]第105 001 个K9
PRIME=797 K9=[0  1  151  250  294  401  522  633  754]第120 001 个K9
PRIME=797 K9=[0  1  165  166  360  422  525  549  781]第135 001 个K9
PRIME=797 K9=[0  1  217  277  361  601  653  657  783]第150 001 个K9
PRIME=797 K9=[0  1  294  415  558  647  653  691  784]第165 001 个K9
PRIME=797 NO(K9)=170 640 NO(K10)=0
```

其中的 $NO(K10)=0$，表示 K_{10} 的个数为0，G_{797} 不含 K_{10}，这就证明了

定理1　$R(10,10)\geqslant 798$⒀

算法概要：第1步，算出素数 p 的 $2m$ 个平方剩余 $D2(1)$，$D2(2)$，…，$D2(2m)$，然后排序使 $D2(i)<D2(i+1)$，这 $2m$ 个点是与0邻接的点集 $N0$⒀如果0与 i 邻接，由 τ是 G_p 的自同构知1与 $i+1$ 邻接，因此当 i 与 $i+1$ 都与0邻接时，或当 i 与 $i+1$ 都是平方剩余时，$i+1\in N01$⒀设 $N01$ 中的 K_3 个数用 $N01(1)$，$N01(2)$，…，$N01(K_3)$ 表示，K_3 表示包含0和1的三角形的个数⒀第2步，设 $[0,1,v_3,v_4,\cdots,v_n]$ 是一个最大完全子图，且 $v_3<v_4<\cdots<v_n$⒀事先并不知道 n，可把 n 估计得大些，当 $p=797$ 时，先设 $n=10$，用 $n-2$ 重循环决定 v_3，v_4，…，v_n，设 $v_3=N01(R)$，$v_4=N01(S)$，…，$v_{10}=N01(Y)$，则 $1\leqslant R<S<\cdots<X<Y\leqslant K_3$⒀程序大意如下：

```
FOR  R=1  TO  K3
FOR  S=R+1  TO  K3
  IF N01(S)与N01(R)不邻接  GOTO  SS
FOR  T=S+1  TO  K3
  IF  N01(T)与前两个N01(I)中的一个不邻接
    GOTO  TT
    ⋮
FOR  X=W+1  TO  K3
  IF N01(X)与前6个N01(I)中的一个不邻接
    GOTO  XX
K9=K9+1
    FOR  Y=X+1  TO  K3
      IF  N01(Y)与前7个N01(I)中的一个不邻接
        GOTO  YY
    K10=K10+1
YY∶NEXT  Y
XX∶NEXT  X
    ⋮
SS∶NEXT  S
RR∶NEXT  R
    PRINT  K9, K10
```

程序计算出 G_p 含有 $K9$ 个 K_9 和 $K10$ 个 K_{10}，如果 $K_9\neq 0$ 而 $K_{10}=0$，则 K_9 最大⒀如果 $K_{10}\neq 0$，必须再增加一重循环计算 K_{11}⒀程序中用 p 维向量 $\boldsymbol{ADJ}$ 表示两个点邻接与否⒀如 J 是平方剩余，则 $\boldsymbol{ADJ}(J)=1$，否则 $\boldsymbol{ADJ}(J)=0$，两点 $I<J$，如果 $\boldsymbol{ADJ}(J-I)=1$ 则 I 与 J 邻接，否则 I 与 J 不邻接⒀

程序全文如下⒀

计算797阶自补图的最大完全子图的 QUICK BASIC 语言程序

```
DEFINT A-Z
DIM ADJ(800), N01(200), D2(400)
PRIME=797∶K9&=0∶K10&=0
```

```
'G797 R 797个顶点是{0,1,2,…,M4}797=M*4+1=M4+1
'如果I-J是平方剩余 则(I,J)是边
'KI&表示G797有多个I阶完全子图
  M1=PRIME\4桑M2=M1+M1桑M4=M2+M2桑PRIME=M1*4+1
  FOR I=0 TO PRIME桑ADJ(I)=0桑NEXT
'计算素数PRIME的M2个二次剩余  数组D2表示二次剩余
FOR D&=1 TO M2桑D2(D&)=D&*D& MOD PRIME桑NEXT
'SORT FOR D2(I)<D2(I+1)  排序使D2(I)<D2(I+1)
FOR I=1 TO M2-1
  FOR J=I+1 TO M2
    IF D2(J)<D2(I) THEN SWAP D2(I),D2(J)
  NEXT J
NEXT I桑排序结束
FOR的P=1 TO M2桑ADJ(D2(P))=1
'如果J是二次剩余,则ADJ(J)=1  如果J-I是二次剩余,则(I,J)是一条边(J>I)
  NEXT P
'N01={J |J0 IN E(G) AND J1 IN E(G)}
'N01是与0且与D2(1)=1邻接的点集,其个数K3是含0,1的三角形的个数
K3=0桑FOR P=2 TO M2
      IF ADJ(D2(P)-D2(1))=1 THEN
      K3=K3+1桑N01(K3)=D2(P)
      END IF
      NEXT
'判断0,1<=N01(R)<=N01(S)<=N01(T) … 是否构成完全图
CLS桑PRINT "797阶自补图的最大完全子图"
FOR R =1 TO K3
FOR S=R+1 TO K3
'如果N01(S)与N01(R)不邻接,则转向下一个S
  IF ADJ(N01(S)-N01(R))=0 THEN GOTO SS
FOR T=S+1 TO K3
'如果N01(T)与N01(R)或N01(S)不邻接,则转向下一个T
    IF ADJ (N01(T)-N01(R))=0 THEN GOTO TT
    IF ADJ (N01(T)-N01(S))=0 THEN GOTO TT
FOR U=T+1 TO K3
     IF ADJ (N01(U)-N01(R))=0 THEN GOTO UU
     IF ADJ (N01(U)-N01(S))=0 THEN GOTO UU
     IF ADJ (N01(U)-N01(T))=0 THEN GOTO UU
FOR V=U+1 TO K3
     IF ADJ (N01(V)-N01(R))=0 THEN GOTO VV
     IF ADJ (N01(V)-N01(S))=0 THEN GOTO VV
     IF ADJ (N01(V)-N01(T))=0 THEN GOTO VV
     IF ADJ (N01(V)-N01(U))=0 THEN GOTO VV
FOR W=V+1 TO K3
     IF ADJ (N01(W)-N01(R))=0 THEN GOTO WW
     IF ADJ (N01(W)-N01(S))=0 THEN GOTO WW
```

```
        IF ADJ (N01(W) -N01(T)) =0 THEN GOTO WW
        IF ADJ (N01(W) -N01(U)) =0 THEN GOTO WW
        IF ADJ (N01(W) -N01(V)) =0 THEN GOTO WW
FOR X =W +1 TO K3
        IF ADJ (N01(X) -N01(R)) =0 THEN GOTO XX
        IF ADJ (N01(X) -N01(S)) =0 THEN GOTO XX
        IF ADJ (N01(X) -N01(T)) =0 THEN GOTO XX
        IF ADJ (N01(X) -N01(U)) =0 THEN GOTO XX
        IF ADJ (N01(X) -N01(V)) =0 THEN GOTO XX
        IF ADJ (N01(X) -N01(W)) =0 THEN GOTO XX
'程序如进行到此,则0,1, N01(R),…,N01(X)构成完全图K9
K9&=K9&+1
'K9&表示K9的个数,下同
   IF K9& MOD 1 500=1 THEN
    '将完全图K9打印出来,打印1500分之一
   PRINT "PRIME= ";PRIME;"K9=[0 ";D2(1);N01(R);N01(S);N01(T);
   PRINT N01(U);N01(V);N01(W);N01(X);"    ";"第 ";K9&;"个 ";"K9 "
   END IF
FOR Y =X +1 TO K3
        IF ADJ (N01(Y) -N01(R)) =0 THEN GOTO YY
        IF ADJ (N01(Y) -N01(S)) =0 THEN GOTO YY
        IF ADJ (N01(Y) -N01(T)) =0 THEN GOTO YY
        IF ADJ (N01(Y) -N01(U)) =0 THEN GOTO YY
        IF ADJ (N01(Y) -N01(V)) =0 THEN GOTO YY
        IF ADJ (N01(Y) -N01(W)) =0 THEN GOTO YY
        IF ADJ (N01(Y) -N01(X)) =0 THEN GOTO YY
'程序如进行到此,则0,1,N01(R),…,N01(Y)构成完全图K10
K10&=K10&+1
      IF K10& MOD 10 = 1 THEN
       '将完全图K10打印出来,打印10分之一
      PRINT "PRIME= ";PRIME; "K1=[0 "; D2(1); N01(R);N01(S);N01(T);
      PRINT N01(U);N01(V); N01(W);N01(X);N01(Y) "] "
      PRINT K10&
      END IF
YY:NEXT Y
XX:NEXT X
WW:NEXT W
VV:NEXT V
UU:NEXT U
TT:NEXT T
SS:NEXT S
RR:NEXT R
PRINT "PRIME= ";PRIME;"N0(K9) = ";K9&;"N0(K10) = "; K10&;
END
```

参 考 文 献

1 谢继国,张忠辅.经典 Ramsey 数 $R(5,9)$ 和 $R(5,10)$ 的下界.科学通报,1996,41(20):1 918～1 919

2 F R K Chung,C M Grinstead. A survey of bounds for classical Ramsey numbers. J Graph Theory,1983(7):25～37

3 C R J Clapham. A class of self-complementary graphs and lower bounds of some Ramsey numbers. J Graph Theory 1979(3):287～289

4 B D Mckay,K M Zhang. The value of Ramsey number Ramsey number $R(3,8)$. J Graph Theory 1992(16):99～105

Ramsey Number $R(10,10)\geqslant 798$

Zhou Shangchao Xu Pingsheng

(Basic Courses Department)

Abstract We proved that Ramsey number $R(10,10)\geqslant 798$.

Key words ramsey number; self complementary graphs; lower bounds

(上接第58页)

参 考 文 献

1 I Broere,J H Hattingh,M A Henning,A A McRae. Majority domination in graphs. Discrete Mathematics. 1995,138:125～135

2 J Dunbar,S Hedetniemi,M A Henning,A A McRae. Minus domination in regular graphs. Discrete Mathematics. 1996,149:311～312

3 邦迪 J A,默蒂 U S R.图论及其应用.吴望名等译.北京:科学出版社,1984.

Signed Domination Number in Graphs

Yu Chongzhi Xu Baogen

(Basic Courses Department)

Abstract A two-valued function f defined on the vertices of a graph $G=(V,E)$, $f:V\rightarrow\{-1,1\}$, is a signed dominating function, such that for every $v\in V$, $f(N[V])\geqslant 1$. The weight of a signed dominating function is $f(v)=\sum_{v\in V}f(v)$. The signed domination number of a graph G, denoted $\gamma_s(G)$, equals the minimum weight of a signed dominating function of G. In this paper, we establish its value for some classes of graphs, and discuss the bounds of $\gamma_s(G)$.

Key words graph; signed dominating function; signed domination number