

一个加权的几何不等式

刘 健

(土木工程系)

摘 要 应用 Hoder 不等式与 Wolstenholme 不等式,建立了涉及三角形边长与内角平分线的一个加权不等式,据之推证其它一些新的三角形不等式,并提出有关的几个未解决的问题与猜想^[9].

关键词 不等式;三角形;内角平分线;点

分类号 O 157

0 引言与主要结果

1935年 P. Erdos^[1]猜出有关三角形的一个新奇命题:设 $\triangle ABC$ 内部任一点 P 到三顶点和三边的距离分别为 R_1, R_2, R_3 和 r_1, r_2, r_3 , 则

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqslant 2(r_1 + r_2 + r_3) \quad (1)$$

两年之后, L. J. Mordell 与 D. F. Barrow^[2]证明了 Erdos 的猜测⁽¹³⁾事实上, 后者建立了较更强的不等式

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqslant 2(w_1 + w_2 + w_3), \quad (2)$$

其中 w_1, w_2, w_3 为 $\angle BPC, \angle CPA, \angle APB$ 的平分线⁽¹³⁾此后, 不断有文献研究 Erdos-Mordell 不等式(1)与 Barrow 不等式(2), 参见文献[3]⁽¹³⁾

D. F. Barrow 博士在证明式(2)时应用了涉及任意实数 x, y, z 与 $\triangle ABC$ 的 Wolstenholme 不等式(见文献[3])

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 2yz \cos A + 2zx \cos B + 2xy \cos C \quad (3)$$

以及下述简单的不等式, 设 $\triangle ABC$ 的边 CA, AB 分别为 b, c , $\angle BAC$ 的平分线为 w_a , 则

$$\overline{bcc} \cos \frac{A}{2} \geqslant w_a \quad (4)$$

从 D. F. Barrow 对式(2)所作的证明受到启发, 作者应用式(3)、(4)及著名的 Holder 不等式, 获得了以下有关三角形内角平分线的加权不等式⁽¹³⁾

定理 设 $\triangle ABC$ 的边 BC, CA, AB 分别为 a, b, c ; 相应边上的内角平分线为 w_a, w_b, w_c , 则当 $0 < k \leqslant 1$ 时, 对任意正数 x, y, z 与实数 u, v, w 有

$$\frac{u^2}{yz} + \frac{v^2}{zx} + \frac{w^2}{xy} \geq 3 \left(\frac{4}{3} \right)^k \left(\frac{uw^k + vw^k + ww^k}{xa^k + yb^k + zc^k} \right)^2, \quad (5)$$

等号当且仅当 $x=y=z, u=v=w$ 且 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立^[13]

不等式 (5) 显然推广了已知的不等式 (见文献 [4])^[13]

$$w_a + w_b + w_c \leq \sqrt{3s}, \quad (6)$$

其中 s 为 $\triangle ABC$ 的半周^[13]

1 定理的证明

引理 设 $a_i > 0, b_i > 0$ ($i=1, 2, \dots, n$), 正数 p, q 满足 $p+q=1$, 则

$$\sum_{i=1}^n a_i^p b_i^q \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^p \left(\sum_{i=1}^n b_i \right)^q, \quad (7)$$

等号 $a_1 = a_2 = \dots = a_n, b_1 = b_2 = \dots = b_n$ 时成立^[13]

不等式 (7) 即为分析中经典的 Holder 不等式, 此处证略^[13]

下证本文定理^[13]

首先, 证明 $0 < k \leq 1$ 时对正数 x, y, z 有

$$(x + y + z)^2 \geq 3 \left(\frac{4}{3} \right)^k [yz \cos^{2k}(A/2) + zx \cos^{2k}(B/2) + xy \cos^{2k}(C/2)] \quad (8)$$

当 $k=1$ 时, 上式成为

$$(x + y + z)^2 \geq 4[yz \cos^2(A/2) + zx \cos^2(B/2) + xy \cos^2(C/2)] \quad (9)$$

易见, 这正是 Wolstenholme 不等式 (3) 在 x, y, z 均为正数时的等价形式 (证略), 其等号仅当 $x \sin A = y \sin B = z \sin C$ 时成立^[13] 根据式 (9) 及 Holder 不等式可知, 当 $p+q=1$ ($p, q > 0$) 时, 对正数 x, y, z 与任意 $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ 有

$$\begin{aligned} & (yz \cos^2 \frac{A}{2})^p (yz \cos^2 \frac{A}{2})'^q + (zx \cos^2 \frac{B}{2})^p (zx \cos^2 \frac{B}{2})'^q + (xy \cos^2 \frac{C}{2})^p (xy \cos^2 \frac{C}{2})'^q \leq \\ & (yz \cos^2 \frac{A}{2} + zx \cos^2 \frac{B}{2} + xy \cos^2 \frac{C}{2})^p (yz \cos^2 \frac{A}{2})' + zx \cos^2 \frac{B}{2}' + xy \cos^2 \frac{C}{2}'^q \leq \\ & \left[\frac{1}{4}(x + y + z)^2 \right]^p \left[\frac{1}{4}(x + y + z)^2 \right]^q, \end{aligned}$$

注意到 $p+q=1$, 即得

$$(x + y + z)^2 \geq 4(yz \cos^{2p} \frac{A}{2} \cos^{2q} \frac{A}{2}' + zx \cos^{2p} \frac{B}{2} \cos^{2q} \frac{B}{2}' + xy \cos^{2p} \frac{C}{2} \cos^{2q} \frac{C}{2}') \quad (10)$$

接着令式 (10) 中的 $\triangle A'B'C'$ 为正三角形并取 $p=2k > 0$, 则 $\cos \frac{A}{2}' = \cos \frac{B}{2}' = \cos \frac{C}{2}' = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$q=2-2k > 0$, 于是当 $0 < k < 1$ 时有

$$(x + y + z)^2 \geq 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{2-2k} (yz \cos^{2k} \frac{A}{2} + zx \cos^{2k} \frac{B}{2} + xy \cos^{2k} \frac{C}{2}),$$

也即式 (8) 此时成立^[13]

中国知网 <https://www.cnki.net>
综上, 不等式 (8) 一般地对 $0 < k \leq 1$ 成立^[13]

其次,于式(8)中作置换: $x \rightarrow xa^k, y \rightarrow yb^k, z \rightarrow zc^k$,则

$$(xa^k + yb^k + zc^k)^2 \geq 3\left(\frac{4}{3}\right)^k [yz(bccos^2 \frac{A}{2})^k + zx(cacos^2 \frac{B}{2})^k + xy(abcos^2 \frac{C}{2})^k] \quad (13)$$

按不等式(4)又知

$$(xa^k + yb^k + zc^k)^2 \geq 3\left(\frac{4}{3}\right)^k (yzw_a^{2k} + zxw_b^{2k} + xyw_c^{2k}) \quad (11)$$

再次,应用 Holder 不等式的特款——Cauchy 不等式,有

$$(yzw_a^{2k} + zxw_b^{2k} + xyw_c^{2k}) \left(\frac{u^2}{yzw_a^{2k}} + \frac{v^2}{zxw_b^{2k}} + \frac{w^2}{xyw_c^{2k}} \right) \geq (u + v + w)^2,$$

据此及式(11)就知

$$\frac{u^2}{yzw_a^{2k}} + \frac{v^2}{zxw_b^{2k}} + \frac{w^2}{xyw_c^{2k}} \geq 3\left(\frac{4}{3}\right)^k \frac{(u + v + w)^2}{(xa^k + yb^k + zc^k)^2} \quad (12)$$

再于上式作置换: $u \rightarrow uw_a^k, v \rightarrow vw_b^k, w \rightarrow ww_c^k$,即得不等式(5)(13)

不等式(5)中等号成立的条件是很容易确定的,从略(13)定理证毕(13)

2 定理的应用

加权不等式(5)含有六个参数 x, y, z, u, v, w 及指数变量 k ,对这些量灵活地赋值,就可得出其它许多新的三角形不等式来(13)下面,我们将给出定理的几个直接推论,同时结合其它简单的不等式来推证新的结论(13)为简化起见,将不讨论等号成立的条件(13)

推论1 设 $0 < k \leq 1$, 正数 x, y, z, u, v, w 满足

$$u^2/yz + v^2/zx + w^2/xy \leq 3, \quad (13)$$

则
$$xa^k + yb^k + zc^k \geq \left(\frac{2}{3}\right)^k (uw_a^k + vw_b^k + ww_c^k) \quad (14)$$

这个显而易见的推论得出了使不等式(14)成立的充分条件,但尚不清楚式(13)是否也是式(14)成立的必要条件(13)

在式(5)或式(14)中作置换: $x \rightarrow x^2, y \rightarrow y^2, z \rightarrow z^2$,并令 $u = yz, v = zx, w = xy$,则得下述二次型不等式(13)

推论2 设 $0 < k \leq 1$, 则对任意实数 x, y, z 有

$$x^2a^k + y^2b^k + z^2c^k \geq \left(\frac{2}{3}\right)^k (yzw_a^k + zxw_b^k + xyw_c^k) \quad (15)$$

注1:由式(5)或式(14)先知式(15)对正数 x, y, z 成立,继而易知式(15)对任意实数 z, y, z 均成立(13)

在式(5)或式(14)中令 $u = v = w = \sqrt{3xyz/(x + y + z)}$, 则得

推论3 设 $0 < k \leq 1$, 则对任意实数 x, y, z 有

$$xa^k + yb^k + zc^k \geq \left(\frac{2}{3}\right)^k \sqrt{3xyz/(x + y + z)} (w_a^k + w_b^k + w_c^k) \quad (16)$$

接着利用推论1来推证有关角平分线与边长的一个不等式(13)

推论4 设 $0 < k \leq 1, 0 < m \leq 1$, 则

$$\frac{a^k}{w_a^m} + \frac{b^k}{w_b^m} + \frac{c^k}{w_c^m} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{k+m} \left(\frac{w_a^k}{a^m} + \frac{w_b^k}{b^m} + \frac{w_c^k}{c^m}\right) \quad (17)$$

证 容易证明

$$\frac{w_b w_c}{a^2} + \frac{w_c w_a}{b^2} + \frac{w_a w_b}{c^2} \leq \frac{9}{4} \quad (18)$$

根据式(18)与幂平均的单调性可知, 当 $0 < m \leq 1$ 时有

$$\left(\frac{w_b w_c}{a^2}\right)^m + \left(\frac{w_c w_a}{b^2}\right)^m + \left(\frac{w_a w_b}{c^2}\right)^m \leq 3 \left(\frac{3}{4}\right)^m \quad (19)$$

因此可在式(14)中令 $x = \left(\frac{3}{2w_a}\right)^m, y = \left(\frac{3}{2w_b}\right)^m, z = \left(\frac{3}{2w_c}\right)^m; u = \frac{1}{a^m}, v = \frac{1}{b^m}, w = \frac{1}{c^m}$, 便得不等式(17)(13)

特别地当 $k = m = 1$ 时, 式(17)成为

$$\frac{a}{w_a} + \frac{b}{w_b} + \frac{c}{w_c} \geq \frac{4}{3} \left(\frac{w_a}{a} + \frac{w_b}{b} + \frac{w_c}{c}\right), \quad (19)$$

此式稍弱于文[4]中猜想不等式 shc³¹:

$$\frac{a}{w_a} + \frac{b}{w_b} + \frac{c}{w_c} \geq \frac{4}{3} \left(\frac{m_a}{a} + \frac{m_b}{b} + \frac{m_c}{c}\right) \quad (20)$$

(其中 m_a, m_b, m_c 为相应边上的中线) 但要直接证明式(19)并非容易^[3]

推论5 设 $0 < k \leq 1, 0 < m \leq \frac{1}{2}$, 则对任意正数 x, y, z 有

$$\begin{aligned} & \left(\frac{y+z}{x}\right)^m a^k + \left(\frac{z+x}{y}\right)^m b^k + \left(\frac{x+y}{z}\right)^m c^k \geq \\ & 4^m \left(\frac{2}{3}\right)^k \left[\left(\frac{x}{y+z}\right)^m w_a^k + \left(\frac{y}{z+x}\right)^m w_b^k + \left(\frac{z}{x+y}\right)^m w_c^k\right] \quad (21) \end{aligned}$$

证 根据定理或其推论1知, 欲证式(21)只要证:

$$\sum [(yz/(z+x)(x+y))(x/(y+z))^2]^m \leq 3/16^m \quad (22)$$

($0 < m \leq \frac{1}{2}$) 按幂平均不等式, 欲证上式只需证 $m = \frac{1}{2}$ 的情形, 即

$$\sum (x/(y+z)) \cdot \frac{yz/(z+x)(x+y)}{(x/(y+z))^2} \leq 3/4 \quad (23)$$

现按半角公式 $\sin \frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$ 及已知的三角不等式 $\sum \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{4}$ 易得

$$\sum ((s-a)/a) \cdot \frac{(s-b)(s-c)/bc}{((s-a)/a)^2} \leq 3/4, \quad (24)$$

再对以 $y+z, z+x, x+y$ 为边长的三角形使用式(24), 就得式(23), 于是式(22)、(21)获证^[3]

推论6 设 $0 < k \leq 1, \triangle ABC$ 的半周为 s , 则对任意正数 x, y, z 有

$$xw_a^k + yw_b^k + zw_c^k \leq \left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}\right) \left(\frac{s}{3}\right)^k \quad (25)$$

证 于式(5)中作置换: $x \rightarrow \frac{x}{a^k}, y \rightarrow \frac{y}{b^k}, z \rightarrow \frac{z}{c^k}$, 则可得

$$\frac{1}{(x+y+z)^2} \left[\frac{u^2}{yz(bc)} + \frac{v^2}{zx(ca)} + \frac{w^2}{xy(ab)} \right] \geq 3 \left(\frac{4}{3}\right)^k (uw_a^k + vw_b^k + ww_c^k),$$

令 $u = \overline{yz}, v = \overline{zx}, w = \overline{xy}$, 又得

$$3\left(\frac{4}{3}\right)^k (\overline{yz}w_a^k + \overline{zx}w_b^k + \overline{xy}w_c^k)^2 \leq (x+y+z)^2 [(bc)^k + (ca)^k + (ab)^k],$$

再作置换: $x \rightarrow \frac{yz}{x}, y \rightarrow \frac{zx}{y}, z \rightarrow \frac{xy}{z}$, 得

$$xw_a^k + yw_b^k + zw_c^k \leq \left(-\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}\right) \overline{[(bc)^k + (ca)^k + (ab)^k]/3}, \quad (26)$$

利用 $s^2 \geq \frac{3}{4} \sum bc$ 与幂平均不等式易证 $\sum (bc)^k \leq 3\left(\frac{2}{3}s\right)^{2k} \quad (0 < k \leq 1)$, 因此由式(26)知式(25)成立

不等式(25)最先由黄西灵得出, 见文献[5](13)

推论7 设 $0 < k \leq 1$, $\triangle ABC$ 的外接圆与内切圆半径分别为 R, r , 则对任意正数 x, y, z 有

$$xw_a^k + yw_b^k + zw_c^k \leq \left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}\right) (R+r)^k \quad (13) \quad (27)$$

证 按 Gerretsen 不等式 $s^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ 的等价形式(参见文献[6]): $bc + ca + ab \leq 4(R+r)^2$, 应用幂平均不等式可证

$$(bc)^k + (ca)^k + (ab)^k \leq 3\left[\frac{4(R+r)^2}{3}\right]^k,$$

(其中 $0 < k \leq 1$) 据此及式(26)便知式(27)成立(13)

显然, 式(27)推广了已知的线性不等式(见文献[6]):

$$w_a + w_b + w_c \leq 3(R+r) \quad (13) \quad (28)$$

在定理的不等式(5)中, 取 $u = yz, v = zx, w = xy$, 整理得

推论8 设 $0 < k \leq 1$, 则对任意正数 x, y, z 有

$$\frac{yzw_a^k + zxw_b^k + xyw_c^k}{xa^k + yb^k + zc^k} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^k \frac{1}{3}(yz + zx + xy) \quad (13) \quad (29)$$

利用式(29)容易推得涉及三角形角平分线、高线和旁切圆半径的不等式(13)

推论9 设 $0 < k \leq 1$, $\triangle ABC$ 相应边上的高线、旁切圆半径分别为 h_a, h_b, h_c 与 r_a, r_b, r_c , 则

$$\left(\frac{r_a}{h_a}\right)^k + \left(\frac{r_b}{h_b}\right)^k + \left(\frac{r_c}{h_c}\right)^k \geq \left(\frac{w_a}{r_a}\right)^k + \left(\frac{w_b}{r_b}\right)^k + \left(\frac{w_c}{r_c}\right)^k \quad (13) \quad (30)$$

另外, 应用式(29)可推得下述涉及 $\triangle ABC$ 内部任意一点的不等式(13)

推论10 设 $0 < k \leq 1$, $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R , 其内部任一点 P 至边 BC, CA, AB 的距离分别为 r_1, r_2, r_3 , 则

$$\frac{(r_2r_3)^k + (r_3r_1)^k + (r_1r_2)^k}{r_1^k + r_2^k + r_3^k} \leq \left(\frac{1}{2}R\right)^k \quad (13) \quad (31)$$

推论11 设 $0 < k \leq 1$, 正数 x, y, z, u, v, w 满足式(13), 其余符号同上, 则

$$x\left(\frac{r_a}{h_a}\right)^k + y\left(\frac{r_b}{h_b}\right)^k + z\left(\frac{r_c}{h_c}\right)^k \geq \left(\frac{2}{3}\right)^k [u\left(\frac{w_a}{a}\right)^k + v\left(\frac{w_b}{b}\right)^k + w\left(\frac{w_c}{c}\right)^k] \quad (13) \quad (32)$$

证 在不等式(5)中作置换: $x \rightarrow \frac{x}{(s-a)^k}, y \rightarrow \frac{y}{(s-b)^k}, z \rightarrow \frac{z}{(s-c)^k}; u \rightarrow \frac{u}{a^k}, v \rightarrow \frac{v}{b^k}, w \rightarrow \frac{w}{c^k}$, 然

后利用 $(s-b)(s-c) \leq \frac{1}{4}a^2$ 可得

$$\left(\frac{u^2}{yz} + \frac{v^2}{zx} + \frac{w^2}{xy}\right) \left[x\left(\frac{r_a}{h_a}\right)^k + y\left(\frac{r_b}{h_b}\right)^k + z\left(\frac{r_c}{h_c}\right)^k\right]^2 \geq 3\left(\frac{4}{3}\right)^k \left[u\left(\frac{w_a}{a}\right)^k + v\left(\frac{w_b}{b}\right)^k + w\left(\frac{w_c}{c}\right)^k\right]^2, \quad (33)$$

于是易见推论11的断言成立^[13]

由于三角形相应边上的内角平分线不小于相应边上的高线,所以,按不等式(5)可知,对任意正数 x, y, z, u, v, w 下式成立^[13]

$$\frac{u^2}{yz} + \frac{v^2}{zx} + \frac{w^2}{xy} \geq 3\left(\frac{4}{3}\right)^k \left(\frac{uh_a^k + vh_b^k + wh_c^k}{xa^k + yb^k + zc^k}\right)^2 \quad (34)$$

由这个显然的推论又可进一步推出其它一些新的三角形不等式^[13]

首先指出式(34)的下述推论^[13]

推论12 设 $0 < k \leq 1$, $\triangle ABC$ 内部任一点 P 至边 BC, CA, AB 的距离分别为 r_1, r_2, r_3 , 则对任意实数 x, y, z 有

$$\frac{x^2}{(r_2 r_3)^k} + \frac{y^2}{(r_3 r_1)^k} + \frac{z^2}{(r_1 r_2)^k} \geq \frac{12^k}{3} \left(\frac{x}{a^k} + \frac{y}{b^k} + \frac{z}{c^k}\right)^2 \quad (35)$$

不等式(35)推广了王振^[7]提出的不等式:

$$\frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_3 r_1} + \frac{1}{r_1 r_2} \geq 4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \quad (36)$$

推论13 设 $0 < k \leq 1$, 正数 x, y, z, u, v, w 满足式(13), 则

$$\frac{x}{\sin^k A} + \frac{y}{\sin^k B} + \frac{z}{\sin^k C} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^k (u + v + w). \quad (37)$$

证 在式(34)中作置换: $x \rightarrow \frac{x}{a^{2k}}, y \rightarrow \frac{y}{b^{2k}}, z \rightarrow \frac{z}{c^{2k}}; u \rightarrow \frac{u}{h_a^k}, v \rightarrow \frac{v}{h_b^k}, w \rightarrow \frac{w}{h_c^k}$, 则易得

$$\left(\frac{u^2}{yz} + \frac{v^2}{zx} + \frac{w^2}{xy}\right) \left(\frac{x}{\sin A} + \frac{y}{\sin B} + \frac{z}{\sin C}\right)^2 \geq 3\left(\frac{4}{3}\right)^k (u + v + w)^2 \quad (38)$$

于是可见推论13成立^[13]

推论14 设 $0 < k \leq 1, m > 0$, 正数 x, y, z, u, v, w 满足 $yz \geq u^2, zx \geq v^2, xy \geq w^2$, 则

$$\frac{x^m}{\sin^k A} + \frac{y^m}{\sin^k B} + \frac{z^m}{\sin^k C} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^k (u^m + v^m + w^m) \quad (39)$$

这一结论显然为前一推论之特款, 注意到简单的不等式 $\sin B \sin C \leq \cos^2 \frac{A}{2}$ 等, 由式(39)又不难得^[13]

推论15 设正数 p, q 满足 $0 < p - q \leq 1$, 则

$$\csc^p A + \csc^p B + \csc^p C \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{p-q} \left(\sec^q \frac{A}{2} + \sec^q \frac{B}{2} + \sec^q \frac{C}{2}\right) \quad (40)$$

另易证在锐角 $\triangle ABC$ 中成立 $\tan B \tan C \geq \cot^2 \frac{A}{2}$, 据此及式(39)又可得

推论16 设 $0 < k \leq 1$, 则对锐角 $\triangle ABC$ 有

$$\sec^k A + \sec^k B + \sec^k C \geq \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\cot^k \frac{A}{2} + \cot^k \frac{B}{2} + \cot^k \frac{C}{2}\right) \quad (41)$$

另外根据推论13可证得涉及两个三角形的下述几何不等式(证略)^[13]

推论17 设 $0 < k \leq 1, 0 < m \leq 1$, 其余符号同前, 则对 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 内部任一点 P 有

$$\frac{1}{r_1^k \sin A} + \frac{1}{r_2^k \sin B} + \frac{1}{r_3^k \sin C} \geq 2^{k+m} \cdot 3^{(k-m)/2} \left(\frac{1}{a^k} + \frac{1}{b^k} + \frac{1}{c^k} \right). \quad (42)$$

特别地, 令式(42)中 $\triangle ABC$ 为正三角形, 则得

$$\frac{1}{r_1^k} + \frac{1}{r_2^k} + \frac{1}{r_3^k} \geq (2\sqrt{3})^k \left(\frac{1}{a^k} + \frac{1}{b^k} + \frac{1}{c^k} \right), \quad (43)$$

此式推广了文献[8]中的主要结果^[13]

从不等式(5)的推论式(38)出发, 采用推论11的推导方法, 还可得下述两个结论^[13]

推论18 设 $0 < k \leq 1$, 则当正数 x, y, z, u, v, w 满足式(13)时有

$$x \left(\frac{r_a}{\sin A} \right)^k + y \left(\frac{r_b}{\sin B} \right)^k + z \left(\frac{r_c}{\sin C} \right)^k \geq \left(\frac{2}{3} \right)^k (uw_a^k + vw_b^k + ww_c^k). \quad (44)$$

推论19 设 $0 < k \leq 1$, $\triangle ABC$ 相应边上的中线为 m_a, m_b, m_c , 其余符号同前, 则当正数 x, y, z, u, v, w 满足式(13)时, 有

$$\frac{x}{(r_a \sin A)^k} + \frac{y}{(r_b \sin B)^k} + \frac{z}{(r_c \sin C)^k} \geq \left(\frac{2}{3} \right)^k \left(\frac{u}{m_a^k} + \frac{v}{m_b^k} + \frac{w}{m_c^k} \right). \quad (45)$$

注2: 采用由推论1来导出推论2, 3, 5的方法, 由推论11, 13, 18, 19分别可得出三个新的推论^[13]

以上给出了本文定理的一系列推论, 其中几个推论不等式仍带有参数, 对它们作更细致的讨论, 无疑还可得到许多的三角形不等式^[13]

3 问题与猜想

三角形不等式的内容是非常丰富的, 对一个已知的不等式作分析, 往往容易引出新的问题或猜想, 进而发现新的结论^[13]下面针对本文中的几个不等式提出相关的问题与猜想^[13]

首先, 针对推论1和推论2分别提出下列问题:

问题1 不等式(14)中指数 k 的范围是否还可扩充?

问题2 求使不等式(15)成立的最大 k 值^[13]

注3: 若求出最大值 $k_{\max}$, 则由二次型不等式的“降幂定理”可知, 当 $0 < k < k_{\max}$ 时式(15)成立^[13]

推论3似乎可加强如下:

猜想1 设 $k \geq \frac{2}{3}$, 则对任意正数 x, y, z 有

$$xa^k + yb^k + zc^k \geq 3 \left(\frac{2\sqrt{3}}{9} \right)^k \frac{3xyz}{x+y+z} (w_a + w_b + w_c)^k \quad (46)$$

其次针对推论9的不等式(30)提出

猜想2 当 $-\frac{2}{3} < k < 0$ 时, 不等式(30)中的不等号反向^[13]

不等式(31)的证明用到了显然的不等式 $w_a \geq h_a$, 因而较弱, 注意到 R 与半周 s 间有关系 $2s \leq 3\sqrt{3}R$, 经考察提出更强的下式^[13]

猜想3 设 $0 < k \leq 1$, 则对 $\triangle ABC$ 内任意一点 p 有

$$\frac{(r_2 r_3)^k + (r_3 r_1)^k + (r_1 r_2)^k}{r_1^k + r_2^k + r_3^k} \leq \left(\frac{s}{3}\right)^k \quad (47)$$

按 Barrow 不等式(2)知 $R_1 + R_2 + R_3 - (w_1 + w_2 + w_3) > 0$, 现猜测这个严格的不等式可加强如下:

猜想⁴ 对 $\triangle ABC$ 内部任意一点 p 有

$$R_1 + R_2 + R_3 - (w_1 + w_2 + w_3) \geq \frac{1}{3} s \quad (48)$$

其中各符号的意义同前⁽¹³⁾

参 考 文 献

- 1 Paul Edos, Problem 3740, Amer. Math. Monthly, 42(1935), 396
- 2 L. J. Mordell and David F. Barrow, Advanced Problem 3740 and Solutions, Amer. Math. Monthly, 44(1937), 252~254
- 3 D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and V. Volenec, Recent Advances in Geometric Inequalities, Kluwer Academic Publishers, 1989
- 4 刘健. 100个待解决的三角形不等式问题. 见: 单 主编. 几何不等式在中国. 南京: 江苏教育出版社, 1996, 143~165
- 5 黄西灵. 一个角平分线不等式的推广. 湖南数学通讯, 1991(5): 42
- 6 O. Bottema 等著. 几何不等式. 单 译, 北京: 北京大学出版社, 1991
- 7 王振. 问题征解117. 数学通讯. 1993, (6): 41
- 8 杨学枝. 一个几何不等式的加强. 湖南数学通讯, 1992, (1): 35~37

A Weighted Geometric Inequality

Liu Jian

(Civil Engineering Department)

Abstract By applying the inequalities of Holder and wolstenholme, we have established a weighted geometric inequality related to the side length of a triangle and the angle-bisector. From this inequality, we also have proved some other triangle inequalities and proposed several relevant unsolved problems and conjectures.

Key words triangle; inequality; positive number