

一种求取三角网格参数化域的方法

李文舜

李介谷

(电子与信息工程系)

(上海交通大学)

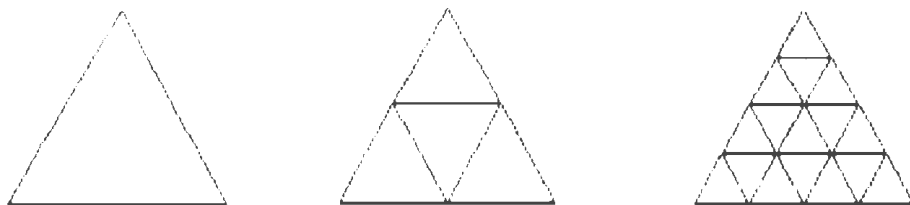
摘 要 这是把多分辨率分析推广到任意类型且不具有细分连续性的三角网格分解、压缩及重构中去的一个过渡步骤¹⁹。要将多分辨率分析应用到三角网格分解、压缩及重构当中,首先解决的问题应是三角网格的参数化,即把三角网格定义为某个域上的函数¹⁹。作为参数化的第一步,本文利用 Voronoi 图的分块技术求取参数化域¹⁹。该方法已在 SGI Indigo²上得以实现¹⁹。

关键词 三角网格;参数化;细分连续性;Voronoi 图;多分辨率分析

分类号 TP 18

0 引 言

Mallat^[1]在1988年将子波变换用于信号处理并提出多分辨率分析的概念,给出了信息或图像分解为不同频率通道的算法和重构算法,开创了子波变换在图像处理中的应用¹⁹。子波变换在时域和频域同有良好的局部化性能,使其成为视频图像压缩编码的主要技术¹⁹。长期以来,离散余弦变换(DCT)是图像编码的主要技术,并有 JPEG、MPEG 1 和 MPEG 2 等标准¹⁹。但 DCT 变换编码技术存在两个主要问题:方块效应和蚊式噪声^[2]¹⁹。所有这些信息压缩技术对于三维的几何结构来说都是无能为力的¹⁹。由基网(Base Mesh)和一系列蕴含细节信息的小波系数组成多分辨率表达可以用来在不同尺度下表达三维物体,这对于压缩、显示、传送和识别都提出一个新的方向¹⁹。近年来,Lounshery^[3]又将多分辨率分析推广到任意拓扑类型的三角网格当中¹⁹。可惜的是,它需要三角网格具有细分连续性¹⁹。所谓三角网格的细分连续性是指,三角网格作为一



(a) 初始三角域

(b) 一次细分后的三角域

(c) 两次细分后的三角域

图1 参数化域的连续细分过程

个函数,它是某个连续细分域上的参数化¹⁹图1显示了参数化域的连续细分的过程¹⁹对这一连续细分域进行重采样,所得的三角网格即为细分连续性的三角网格¹⁹本文利用 Voronoi 图的分块技术对原始三角网格重新分块,利用其对偶三角化(Dual to Triangulation)的特性即可求取三角参数化域¹⁹.

1 Voronoi 图^[4]

为了阐明 Voronoi 图的概念,先提出一个问题¹⁹.

问题 给定一个包含 N 个平面点的集合 S ,对于每个 S 中点 p_i ,如果点 (x,y) 与 p_i 的距离小于与 S 中其它任何点的距离,那么这些点的轨迹是什么呢?

显然,以上问题将平面分割为一些区域⁽¹³⁾我们来分析这个被分割平面的结构⁽¹³⁾先考察两点 p_i 和 p_j ,则线段 $p_i p_j$ 之垂直平分线将平面分为两半⁽¹³⁾其中包含 p_i 的半平面即为所有离 p_i 比 p_j 更近的点的轨迹,记为 $H(p_i, p_j)$,用 $V(i)$ 表示所有离 p_i 最近的点之集合,则它是 $N-1$ 个半平面 $H(p_i, p_j)$ 之交集,即 $V(i) = \bigcap_{i \neq j} H(p_i, p_j)$ ⁽¹³⁾

$V(i)$ 是一个凸边形区域,其边数不超过 $N-1$ ⁽¹³⁾我们称 $V(i)$ 为 p_i 对应的 Voronoi 多边形,称 p_i 为基点¹⁹图2(a)中多边形即为 Voronoi 多边形¹⁹.

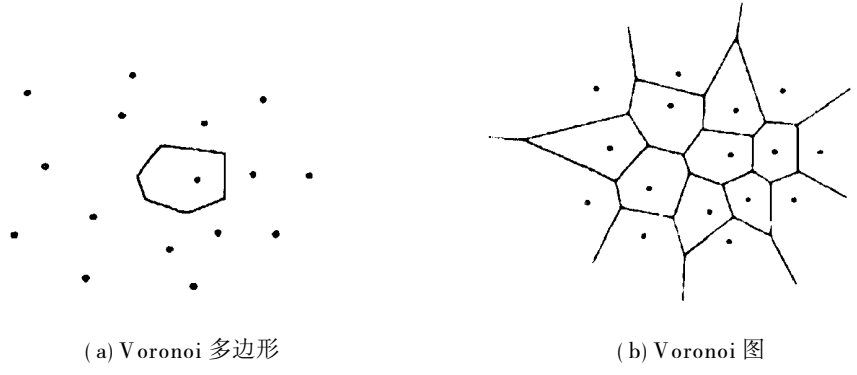


图2 Voronoi 图

由这 N 个区域 $V(i)$ 构成的凸网(Convex Net)即为 Voronoi 图,记为 $V(S)$ (见图2(b))¹⁹. 图的顶点称为 Voronoi 顶点(Vertex),线段称为 Voronoi 边(Edge)¹⁹在 Voronoi 图中,若点 (x,y) 属于 $V(i)$,则 p_i 是 (x,y) 的最近邻¹⁹从广义上讲,Voronoi 图包含由给定集合定义的所有最近邻信息¹⁹由图2(b)可知,每个 Voronoi 顶点与三个 Voronoi 边相邻¹⁹因此,若将相交于一个顶点的各 Voronoi 多边形的基点连接起来,则正好为一三角形¹⁹Voronoi 图的这一性质称为对偶三角化,这是它的重要性质之一¹⁹.

本文所讨论的 Voronoi 图为离散的 Voronoi 图¹⁹称之为离散是因为构成三角网格的三角面(Triangulation)可看成离散的点¹⁹Voronoi 多边形由所有离基点最近的离散点(即为三角面)组成¹⁹这里所说的基点也是一个三角面,称之为基面(Site Face)¹⁹为了度量三角面之间的距离,我们定义了一个无向图(Undirected Graph)¹⁹此图的结点(Node)对应于三角网格的三角面,而图的边将相邻三角面相连接¹⁹边(Edge)的代价值(Cost)为相邻三角面之形心间的距离¹⁹.任意两三角面间的距离为它们之对应结点间的最短路径长度¹⁹图4为我们求得的 Voronoi 图¹⁹.

求 Voronoi 图一般是先给定包含各基点的集合 S , 而我們是在求 Voronoi 图的过程中动态地决定集合 S 的各基点¹⁹前面已提过, Voronoi 图具有对偶三角化的性质¹⁹这就要求在三角网格中生成的 Voronoi 多边形满足如下三个条件:

- (1) Voronoi 多边形与盘形同胚(Homeomorphic)¹⁹.
- (2) 任意两个 Voronoi 多边形最多只有一个邻边¹⁹.
- (3) 任意一个 Voronoi 顶点最多只能属于三个 Voronoi 多边形¹⁹.

根据这三个条件, 动态地求基点集合 S 的算法如下:

- (1) 任取一点(三角面)作为基点¹⁹.
- (2) 执行 Voronoi 多边形扩张¹⁹.
- (3) 若 Voronoi 图没有覆盖整个三角网格且不违反条件(1), 则转第(2)步¹⁹若覆盖整个三角网格, 则转第(4)步¹⁹若违反条件(1), 则将新近加到 Voronoi 多边形的三角面作为新的基点, 并转第(2)步¹⁹.
- (4) 若不满足条件(2), 则在 Voronoi 多边形之邻边上任选一个三角面作为新的基点, 并转第(2)步¹⁹.
- (5) 若不满足条件(3), 是任选一个与此 Voronoi 顶点相邻的三角面作为新的基点, 并转第(2)步¹⁹.
- (6) 结束¹⁹.

2 Voronoi 图在三角网格分块中的实现

原始三角网格是由一系列逼近三维物体表面的三角面组成, 我们采用一个无向图来描述之¹⁹此图的结点表示三角面, 图的边为相邻三角面的连接¹⁹边的代价值为相邻三角面之形心间的距离¹⁹由于结点表示三角面, 故此图中结点最多与三个边相连¹⁹设网的三角面数目(即图的结点数)为 N , 则图的边数不超过 $3N$ ⁽¹³⁾由于边数远小于 N^2 , 我们采用图的邻接表表示法来表示和存储此图, 以节省存储空间和提高访问速度¹⁹.

关于 Voronoi 图, 先给出几个定义¹⁹.

定义1 路径长度: 有图 $G = (V, E)$, 连接结点 i 和 j 的边之代价值记为 $C[i, j]$ ⁽¹³⁾若一路径逐次经过 $n(1), n(2), \dots, n(m)$ 各结点, 并记其长度为 P ⁽¹³⁾则

$$P = \sum_{i=1}^{m-1} C[n(i), n(i+1)]^{(13)}$$

定义2 单源最短路径问题(Single-Source Shortest Path Problem): 在图 $G = (V, E)$ 中给定一结点为出发点, 求解此点到 V 中其它各结点长度最小的路径即为单源最短路径问题¹⁹.

定义3 三角面间距离: 两三角面对应的结点间最短路径长度, 即为三角面间的距离¹⁹.

求 Voronoi 图, 实际上是多源最短路径问题(Multi-Source Shortest Path Problem), 其中源即是基点¹⁹求解单源最短路径的 Dijkstra 算法见算法⁽⁶⁾¹⁹其中, 图为 $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, \dots, n\}$, 结点 1 是源⁽¹³⁾为二维数组, $C[i, j]$ 表示从结点 i 到 j 的代价值⁽¹³⁾若不存在边 $i-j$, 则将 $C[i, j]$ 定义为无穷大⁽¹³⁾ $[i]$ 为结点 i 离源结点的距离, 程序结束时为 i 到源的最小距离值⁽¹³⁾根据我们所用的图的结构特点, 我们对 Dijkstra 算法作了修改, 见算法²¹⁹.

算法1

```

Procedure Dijkstra; {Dijkstra compute the cost of the
                    shortest paths from vertex 1 to
                    every other vertex }
begin
  S := {1};
  for i := 2 to n do
    D[i] = C {1, i}; {Initialize D }
  for j := 1 to n - 1 do begin
    choose a vertex w in V-S such that
      D[w] is a minimum;
    add w to S;
    for each vertex v in V-S do
      D[v] := min ( D[v], D[w] + C[w, v] );
    end;
  end.

```

算法2

```

Procedure Modified _ Dijkstra;
begin
  S := {1};
  w := 1;
  for j := 1 to n - 1 do begin
    for each nabor node of w ( no more than three)
    do begin
      if v is in S { v is one of neighbour node }
        goto label;
      if v is in Q do begin
        D[v] := min ( D[v], D[w] + C[w, v] );
        goto label;
      end;
      add v to Q;
    label: end;
    choose a vertex w in Q such that
      D[w] is minimum;
    add w to S;
  end;
end.

```

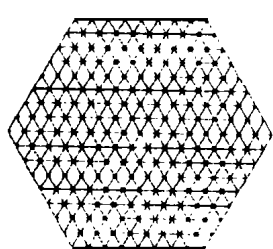
修改后的 Dijkstra 算法在搜索最小距离结点时,其搜索范围是集合 Q ,而对于 Dijkstra 算法是集合 $V-S$ (¹³现在来比较这两个集合大小(¹³起始,集合 $V-S$ 的结点数目为 $N-1$ (N 为总结点数)(¹³集合 $V-S$ 以 1 为递减量,直到算法结束时为空集(¹³集合 Q 起始为源结点之邻结点数,因而不超过 3(¹³在每个循环中,集合 Q 动态地增加或减少,算法结束时也为空集(¹³在集合 $V-S$ 比较大时,集合 Q 小得可以忽略不计(¹³而在集合 $V-S$ 较小时,集合 Q 也很小,最后同为空集(¹³总体来看, N 一般很大,故集合 Q 比 $V-S$ 要小很多(¹³因而减小了搜索范围,提高了搜索速度(¹³另外,集合 Q 中后被加入的结点离源结点较远(¹³因而我们可有目的地先搜索先被加入的结点,以提高搜索效率(¹³修改过的 Dijkstra 算法比原 Dijkstra 算法快的地方还在于每次循环中对距离 $D[w]$ 的修改上:对于前一算法,只需修改新近加入到集合 S 的结点的邻结点(邻结点数不超过 3);对于后一算法,则是对集合 $V-S$ 中的所有结点进行修改(¹³)

由单源最短路径的求解可类推多源最短路径的情况(¹³有一种方法是逐次求每个结点到各 Voronoi 基点的最短距离,然后再比较这些最短距离之最小值,以决定该结点归属于哪个基点(¹³这种方法将需求解 $S \times (N - S)$ 次单源最短路径问题(S 为基点数)(¹³我们采用的方法是以 S 个基点为源,同时扩张各 Voronoi 多边形,其求解单源最短路径问题只需 S 次(¹³与第一次方法相比,求解时间只为其 $1/(N - S)$)(¹³一般来说, N 达到上万,而 S 只为几十(¹³可见,节省的时间是可观的(¹³随着三角网格的三角面增多,节省时间也增加(¹³)

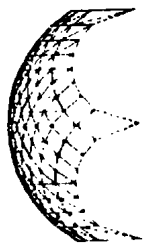
3 实验结果

用 Voronoi 图将原始三角网格分块并求取参数化域是三角网格参数化的第一步,我们已在 SGI Indigo² 工作站上用 C++ 语言实现(¹³图 3 为原始三角网格,它是一半球被切除六小块(¹³由 384 个三角面和 217 个顶点组成(¹³图 3(a)、3(b) 分别为 $X-Y$ 平面、 $Z-Y$ 平面的投影图(¹³图 4 为分块后所得 Voronoi 图(¹³利用 Voronoi 图的对偶三角化特性即可求得三角参数化域(¹⁹

值得注意的是,三角网格重分块所处理的数据量比较大¹⁹在实现网格重分块时,数据结构和算法应该充分考虑,以满足内存空间和实时性的要求¹⁹.



(a)



(b)

图3 原始三角网格

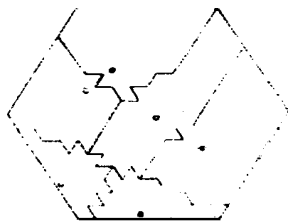


图4 图3分块后的 Voronoi 图

4 结束语

作为三维几何体的表达和信息压缩来说,多分辨分析是一条极有意义的途径¹⁹本文只是该研究工作的一部分也是起始部分,以后的工作将随着工作的深入继续整理发表¹⁹.

参 考 文 献

- 1 Stephane Mallat· A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation· IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989, 11(7) :674~693
- 2 马维祯¹⁹利用子波变换的图像压缩编码技术¹⁹信号处理, 1995, 11(3) :129~138
- 3 J Michael Lounsbery· Multiresolution Analysis for Surface of Arbitrary Topological type· Ph· D· thesis, Department of Computer Science and Engineering, University of Washington, 1994, 9
- 4 Franco P· Preparata and Michael Shamos, Computational Geometry, Springer Verlag New York Inc, 1985
- 5 A Aho, J E Hopcroft, J D Ullman· Data Structures and Algorithms, Addisonwesley, Reading, Mass, 1983

A Method of Acquiring Triangular Mesh Parametrization Domain

Li Wenshun¹ Li Jiegu²

(¹ Electronic and Information Engineering Department ² Shanghai Jiaotong University)

Abstract In this article we extend the use of multiresolution analysis to triangular mesh decomposition, compression and reconstruction with arbitrary topological type and non-subdivision connectivity, which is a transition step. It is necessary to solve the triangular mesh parametrization problem if we apply multiresolution analysis to triangular mesh. As the first step of parametrization, this paper acquires the parametrization domain by the partition technique of Voronoi Diagram. This method is realized on SGI Indigo² workstation.

Key words triangular mesh; parametrization; subdivision connectivity; Voronoi Diagram; multiresolution analysis